Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. D. Roth

SS 2012
7.06.2012

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 8. Übungsblatt

Aufgabe 37

a) Es gilt $\nabla f(x,y) = (y+1, x-2)^T \overset{!}{=} (0,0)^T$ genau dann, wenn $(x,y) = (2,-1)$ ist. Somit ist $(2,-1)$ der einzige kritische Punkt von f. Wegen $\det H_f(2,-1) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 < 0$ ist die Hessematrix $H_f(2,-1)$ indefinit, so dass f in $(2,-1)$ einen Sattelpunkt besitzt.

b) Der Gradient von f lautet $\nabla f(x,y) = (6x^2 - 3y, -3x + 6y^2)^T$. Die erste Komponente ist $= 0$ genau dann, wenn $y = 2x^2$ ist. In diesem Fall ergibt sich für die zweite Komponente $-3x + 24x^4 = 3x(8x^3 - 1)$. Die kritischen Punkte sind also $(0,0)$ und $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Die Hessematrix von f ist gegeben durch $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x & -3 \\ -3 & 12y \end{pmatrix}$.

Da $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ die Eigenwerte -3 und 3 besitzt, ist $H_f(0,0)$ indefinit. Deshalb ist $(0,0)$ ein Sattelpunkt.

Da $H_f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ die Eigenwerte 3 und 9 besitzt, ist $H_f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ positiv definit. Somit hat f in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ein lokales Minimum.

c) Wir bestimmen zunächst die kritischen Punkte von f. Es gilt

$$f_x(x,y) = 2e^{-x^2-y^2} + (2x+2y+3)e^{-x^2-y^2}(-2x) = (-4x^2 - 4xy - 6x + 2)e^{-x^2-y^2}\,.$$

Wegen $f(x,y) = f(y,x)$ ergibt sich daraus $f_y(x,y) = f_x(y,x) = (-4y^2 - 4xy - 6y + 2)e^{-x^2-y^2}$. Kritische Punkte von f sind solche mit $\nabla f(x,y) = 0$, also mit

$$-4x^2 - 4xy - 6x + 2 = 0 \qquad \text{und} \qquad -4y^2 - 4xy - 6y + 2 = 0\,. \tag{$*$}$$

Wir ziehen die erste von der zweiten Gleichung ab und erhalten

$$4(x^2 - y^2) + 6(x - y) = 0\,, \qquad \text{also} \qquad (x-y)\big(4(x+y) + 6\big) = 0\,.$$

Dies ist gleichbedeutend mit $x - y = 0$ oder $4(x+y) + 6 = 0$. Im ersten Fall, also für $x = y$, folgt aus $(*)$ die Gleichung

$$-8x^2 - 6x + 2 = 0\,, \qquad \text{also} \qquad x^2 + \tfrac{3}{4}x - \tfrac{1}{4} = 0\,.$$

Diese hat die zwei Lösungen $x_{1,2} = -\frac{3}{8} \pm (\frac{9}{64} + \frac{1}{4})^{1/2}$, d. h. $x_1 = \frac{1}{4}$ und $x_2 = -1$.
Im zweiten Fall (für $y = -x - \frac{3}{2}$) wird die erste Gleichung in $(*)$ zu

$$-4x^2 - 4x(-x - \tfrac{3}{2}) - 6x + 2 = 0\,, \qquad \text{also} \qquad 2 = 0\,.$$

Es gibt folglich genau zwei kritische Punkte: $(-1,-1)$ und $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

Nur dort können lokale Extrema von f sein, doch ob tatsächlich Extrema vorliegen, müssen wir noch untersuchen. Dazu betrachten wir die Hessematrix von f. Es gilt

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= (-8x-4y-6)e^{-x^2-y^2} - 2x(-4x^2-4xy-6x+2)e^{-x^2-y^2} \\ &= (8x^3+8x^2y+12x^2-12x-4y-6)e^{-x^2-y^2}\,, \\ f_{yy}(x,y) &= (8y^3+8xy^2+12y^2-4x-12y-6)e^{-x^2-y^2}\,, \\ f_{xy}(x,y) &= -4xe^{-x^2-y^2} - 2y(-4x^2-4xy-6x+2)e^{-x^2-y^2} \\ &= (8x^2y+8xy^2+12xy-4x-4y)e^{-x^2-y^2}\,. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$H_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} f_{xx}(-1,-1) & f_{xy}(-1,-1) \\ f_{xy}(-1,-1) & f_{yy}(-1,-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6e^{-2} & 4e^{-2} \\ 4e^{-2} & 6e^{-2} \end{pmatrix}.$$

Wegen $f_{xx}(-1,-1) = 6e^{-2} > 0$ und $\det H_f(-1,-1) = 20e^{-4} > 0$ ist diese Matrix positiv definit. Somit besitzt f im Punkt $(-1,-1)$ ein lokales Minimum. Weiter ist

$$H_f(\tfrac14,\tfrac14) = \begin{pmatrix} -9e^{-1/8} & -e^{-1/8} \\ -e^{-1/8} & -9e^{-1/8} \end{pmatrix}.$$

Wegen $f_{xx}(\frac14,\frac14) = -9e^{-1/8} < 0$ und $\det H_f(\frac14,\frac14) = 80e^{-1/4} > 0$ ist diese Matrix negativ definit. Im Punkt $(\frac14,\frac14)$ hat f daher ein lokales Maximum.

Aufgabe 38

Da Q abgeschlossen und beschränkt ist und f auf Q stetig ist, nimmt f nach dem Satz in 19.18 auf Q Maximum und Minimum an.
Wir betrachten f zunächst im Inneren von Q, also auf $(0,5)\times(0,5)$. Es ist

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy-4y-4x \\ x^2-4x+4 \end{pmatrix}.$$

Gilt $\nabla f(x,y) = (0,0)$, so liefert die zweite Komponente $(x-2)^2 = 0$, d.h. $x = 2$. Für $x = 2$ lautet die erste Komponente -8. Diese ist stets $\neq 0$, so dass es keine kritischen Punkte von f gibt. Daher besitzt f keine lokalen Extremstellen in $(0,5)\times(0,5)$ und die Extrema von f werden auf dem Rand von Q angenommen. Wir untersuchen f auf dem Rand von Q:
$x = 0$: $f(0,y) = 4y-2$. Dies wird maximal für $y = 5$ mit $f(0,5) = 18$ und minimal für $y = 0$ mit $f(0,0) = -2$.
$x = 5$: $f(5,y) = 9y-52$. Dies wird maximal für $y = 5$ mit $f(5,5) = -7$ und minimal für $y = 0$ mit $f(5,0) = -52$.
$y = 0$: $f(x,0) = -2x^2-2 =: g_1(x)$. Wegen $g_1'(x) = -4x \leq 0$ für $x \in [0,5]$ ist g_1 auf $[0,5]$ monoton fallend. Daher sind 0 und 5 die Extremstellen von $g_1 = f(\cdot,0)$ mit $f(0,0) = -2$ und $f(5,0) = -52$.
$y = 5$: $f(x,5) = 3x^2-20x+18 =: g_2(x)$. Wegen $g_2'(x) = 6x-20 = 0 \iff x = \frac{10}{3} \in (0,5)$ müssen wir $f(0,5) = 18$, $f(\frac{10}{3},5) = -\frac{46}{3}$ und $f(5,5) = -7$ berücksichtigen.
Insgesamt erhalten wir

$$\max_{(x,y)\in Q} f(x,y) = 18 \qquad \text{und} \qquad \min_{(x,y)\in Q} f(x,y) = -52.$$

Aufgabe 39

Da die Menge S beschränkt und abgeschlossen ist, nimmt die stetige Funktion f dort ihr Minimum und ihr Maximum an; die Existenz der globalen Extrema ist also gesichert. Definiere

$$g(x,y,z) := \begin{pmatrix} g_1(x,y,z) \\ g_2(x,y,z) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x+y+z \\ x^2+y^2+z^2-1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ g(x,y,z) = (0,0)\}$. Zur Bestimmung der globalen Extrema von f auf S verwenden wir die Multiplikatorenregel von Lagrange. Zunächst überprüfen wir die Voraussetzungen: Sowohl f als auch g sind auf $\mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar. Wegen

$$g'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

gilt $\operatorname{rang} g'(x,y,z) < 2$ genau für $x = y = z$; solche Punkte können jedoch die Nebenbedingungen $g_1(x,y,z) = 0$ und $g_2(x,y,z) = 0$ nicht erfüllen, denn aus $x + y + z = 0$ folgte dann $x = y = z = 0$ im Widerspruch zu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Also erhalten wir sämtliche Kandidaten für Extremstellen durch Anwenden der Multiplikatorenregel von Lagrange: Wir setzen

$$\begin{aligned} L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &:= f(x,y,z) + \lambda_1 g_1(x,y,z) + \lambda_2 g_2(x,y,z) \\ &= 5x + y - 3z + \lambda_1(x + y + z) + \lambda_2(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \end{aligned}$$

und lösen dann das Gleichungssystem $\nabla L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = \vec{0}$, also die fünf Gleichungen

$$\begin{gathered} 5 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x = 0\,, \qquad 1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 y = 0\,, \qquad -3 + \lambda_1 + 2\lambda_2 z = 0\,, \\ x + y + z = 0\,, \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\,. \end{gathered}$$

Addition der ersten drei Gleichungen liefert

$$3 + 3\lambda_1 + 2\lambda_2(x + y + z) = 0\,,$$

wegen $x+y+z = 0$ also $\lambda_1 = -1$. Damit wird die erste Gleichung zu $4+2\lambda_2 x = 0$, was insbesondere $\lambda_2 \neq 0$ bedeutet. Die zweite Gleichung lautet $2\lambda_2 y = 0$, woraus mit $\lambda_2 \neq 0$ sofort $y = 0$ folgt. Aus $x+y+z = 0$ ergibt sich dann $z = -x$ und in $x^2+y^2+z^2 = 1$ eingesetzt folgt $2x^2 = 1$, d.h. $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ oder $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Die extremwertverdächtigen Stellen sind damit

$$\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, 0, -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\right) \qquad \text{und} \qquad \left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\right).$$

Die Funktionswerte dort sind $f(\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,) = 4\sqrt{2}$ bzw. $f(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}\,) = -4\sqrt{2}$. Folglich besitzt f auf der Menge S das Maximum $4\sqrt{2}$ und das Minimum $-4\sqrt{2}$.

Aufgabe 40

a) Für einen kritischen Punkt muss gelten $\nabla f(x,y) = (2x(24x^2 - 7y), -7x^2 + 2y)^T \stackrel{!}{=} (0,0)^T$. Aus der ersten Gleichung folgt $x = 0$ oder $24x^2 - 7y = 0$. Der Fall $x = 0$ führt zu $y = 0$, und wir erhalten den kritischen Punkt $(x_0, y_0) = (0,0)$. Aus $24x^2 - 7y = 0$ folgt $2y = \frac{48}{7}x^2$ und dies in die zweite Gleichung eingesetzt ergibt $-7x^2 + \frac{48}{7}x^2 = 0$, also wieder $x = 0$. Einziger kritischer Punkt ist somit $(0,0)$.

b) $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 144x^2 - 14y & -14x \\ -14x & 2 \end{pmatrix}$ und folglich gilt $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ist positiv semidefinit, wir können also mit dem Satz in 19.17 keine Aussage treffen

c) Auf der Geraden $x = 0$ wird die Funktion beschrieben durch

$$g(y) := f(0,y) = y^2\,.$$

Für $y = 0$ besitzt g ein striktes lokales Minimum.

Alle anderen Ursprungsgeraden können durch $y = ax$ mit $a \in \mathbb{R}$ dargestellt werden, und die Funktion wird dann durch

$$h(x) := f(x, ax) = 12x^4 - 7ax^3 + a^2x^2$$

beschrieben. Wir erhalten

$$h'(x) = 48x^3 - 21ax^2 + 2a^2x \quad \text{also} h'(0) = 0$$

sowie

$$h''(x) = 144x^2 - 42ax + 2a^2 \quad \text{d.h.} h''(0) = 2a^2 > 0 \; .$$

Somit besitzt h in $x = 0$ ein striktes lokales Minimum.

d) Auf der Parabel $y = ax^2$ hat die Funktion die Gestalt

$$p(x) := f(x, ax^2) = 12x^4 - 7ax^4 + a^2x^4 = x^4(a^2 - 7a + 12) = x^4(a-3)(a-4) \; .$$

Damit ergibt sich

$$\begin{array}{rclcrcl} p'(x) & = & 4x^3(a-3)(a-4) & \Rightarrow & p'(0) & = & 0 \\ p''(x) & = & 12x^2(a-3)(a-4) & \Rightarrow & p''(0) & = & 0 \\ p'''(x) & = & 24x(a-3)(a-4) & \Rightarrow & p'''(0) & = & 0 \\ p''''(x) & = & 24(a-3)(a-4) & \Rightarrow & p''''(0) & = & (a-3)(a-4) \; . \end{array}$$

Für $a \in [3, 4]$ ist $p''''(0) < 0$ und in $x = 0$ liegt ein striktes Maximum vor. Für $a \notin [3, 4]$ ist $p''''(0) > 0$ und in $x = 0$ liegt ein striktes Minimum vor (siehe HM I, 10.15).

Bei dem kritischen Punkt $(0, 0)$ handelt es sich also um einen Sattelpunkt.

Aufgabe 41

Schreibe $g(x, y, z) = f(x, y, z)v(x, y, z)$ mit

$$f(x, y, z) := \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \, , \qquad v(x, y, z) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

Mit der Produktregel aus 19.21 erhalten wir $\operatorname{rot} g = \nabla \times g = \nabla \times (fv) = f(\nabla \times v) + (\nabla f) \times v$. Offenbar ist $\nabla \times v = \vec{0}$ und $f_x(x, y, z) = -2x(x^2 + y^2 + z^2)^{-2} + 8x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3}$; die anderen partiellen Ableitungen berechnet man genauso und erhält

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{8 - 2(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} , \qquad \text{also} \qquad (\nabla f) \times v = \vec{0} .$$

Folglich ist $\operatorname{rot} g = \vec{0}$. Für die Divergenz ergibt sich

$$\begin{aligned} \operatorname{div} g &= \nabla \cdot g = \nabla \cdot (fv) = f(\nabla \cdot \vec{v}\,) + (\nabla f) \cdot \vec{v} \\ &= 3f + \frac{8 - 2(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \, (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + 2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \, . \end{aligned}$$

Aufgabe 42

Für $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \backslash \{\vec{0}\}$ definiere $r(\vec{x}) := \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$. Dann ist $f = F \circ r$ und für jedes $k = 1, \ldots, n$ gilt

$$\frac{\partial r}{\partial x_k} \, (\vec{x}) = \frac{2x_k}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}} = \frac{x_k}{\|\vec{x}\|} .$$

Damit erhalten wir

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} \, (\vec{x}) = \frac{\partial (F \circ r)}{\partial x_k} \, (\vec{x}) = F'\big(r(\vec{x})\big) \, \frac{\partial r}{\partial x_k} \, (\vec{x}) = F'\big(\|\vec{x}\|\big) \, \frac{x_k}{\|\vec{x}\|} .$$

Weiter ist

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(\vec{x}) &= F''\big(\|\vec{x}\|\big)\,\frac{x_k^2}{\|\vec{x}\|^2} + F'\big(\|\vec{x}\|\big)\,\frac{1}{\|\vec{x}\|} + F'\big(\|\vec{x}\|\big)x_k \cdot (-1)\,\frac{1}{\|\vec{x}\|^2}\,\frac{x_k}{\|\vec{x}\|} \\
&= F''\big(\|\vec{x}\|\big)\,\frac{x_k^2}{\|\vec{x}\|^2} + \left(\frac{1}{\|\vec{x}\|} - \frac{x_k^2}{\|\vec{x}\|^3}\right)F'\big(\|\vec{x}\|\big).
\end{aligned}
$$

Somit ergibt sich für den Laplaceoperator

$$
\begin{aligned}
\Delta f(\vec{x}) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(\vec{x}) \\
&= F''\big(\|\vec{x}\|\big)\,\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{\|\vec{x}\|^2} + \left(\frac{n}{\|\vec{x}\|} - \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{\|\vec{x}\|^3}\right)F'\big(\|\vec{x}\|\big) \\
&= F''\big(\|\vec{x}\|\big) + \frac{n-1}{\|\vec{x}\|}\,F'\big(\|\vec{x}\|\big).
\end{aligned}
$$