Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. D. Roth

SS 2012
14.06.2012

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

9. Übungsblatt

Aufgabe 43

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} (xy + y^2)\, d(x,y)$$

b) $$\iint\limits_{[-1,0]\times[0,2]} \cosh(2x + y)\, d(x,y)$$

Aufgabe 44

Skizzieren Sie die Integrationsbereiche der folgenden Integrale, vertauschen Sie jeweils die Integrationsreihenfolge und berechnen Sie den Wert der Integrale.

a) $$\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{x^2}\, dx \right) dy$$

b) $$\int_0^1 \left(\int_y^{y^2+1} x^2 y\, dx \right) dy$$

Aufgabe 45

a) Die Kurve $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch $\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$. Berechnen Sie

$$\int_\gamma f\, ds \qquad \text{für} \quad f(x,y,z) := 2z - \sqrt{x^2+y^2}\,.$$

b) Berechnen Sie jeweils das Kurvenintegral

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

i) $\vec{v}(x,y) = (e^x, xy)\,, \qquad \gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (\cos t, \sin t)$

ii) $\vec{v}(x,y,z) = (y, -z, x)\,, \qquad \gamma\colon [0, \ln 2] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (\sinh t, \cosh t, \sinh t)$

iii) $\vec{v}(x,y) = (\sin x, x^2 + y^2)\,, \qquad \gamma\colon [0,2] \mapsto \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{cases} (t,0)\,, & 0 \le t \le 1 \\ (1, t-1)\,, & 1 < t \le 2 \end{cases}$

c) Ein Massepunkt bewege sich unter der Wirkung des Kraftfeldes $\vec{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (2xy, x^2 + y^2)$ auf dem durch die Punkte $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$, $(0,1)$ und $(-1,2)$ (in dieser Reihenfolge) gebildeten Polygonzug γ. Welche Arbeit $\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s}$ wird hierbei verrichtet?

Aufgabe 46

Es sei D das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. Das Vektorfeld $\vec{v}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + xy \\ x^2 y - y^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\oint_{\partial D} \vec{v} \cdot d\vec{s}$ zunächst direkt und anschließend mit dem Gaußschen Integralsatz.

Aufgabe 47

Berechnen Sie unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes

$$\iint_G (x^2 + y)\, d(x,y)\,, \qquad \text{wobei } G := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\right\}.$$

Aufgabe 48

Die Vektorfelder $\vec{v}, \vec{w} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sind gegeben durch

$$\vec{v}(x,y,z) := \begin{pmatrix} y^2 + 2z^3yx \\ 2y + z^3x^2 \\ y^2 + 3z^2yx^2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{w}(x,y,z) := \begin{pmatrix} z^2 \\ e^z \\ ye^z + 2xz \end{pmatrix}.$$

a) Überprüfen Sie jeweils, ob es sich um ein Potentialfeld handelt, und bestimmen Sie gegebenenfalls ein zugehöriges Potential.

b) Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} \qquad \text{und} \qquad \int_\gamma \vec{w} \cdot d\vec{s}\,,$$

wobei die Kurve γ gegeben ist durch $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (1-t, t, 0)$.

Aufgabe 49

Es sei D das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(0,\pi)$, $(\pi,0)$. Das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei defininiert durch

$$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} \sin x \\ xy \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $\int_{\partial D} \vec{v} \cdot d\vec{s}$ direkt und mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes.

b) Berechnen Sie $\oint_{\partial D} \vec{v} \cdot \vec{N}\, ds$ direkt und mit Hilfe des Divergenssatzes.

Die **Prüfung** zur HM II findet am Montag, den 17.09.2012, statt.
Zur Teilnahme ist eine Anmeldung erforderlich. **Anmeldeschluss: Freitag, der 20.07.2012.**
Weitere Informationen zur Prüfung entnehmen Sie bitte der Vorlesungshomepage

http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm2phys2012s/.