Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. D. Roth

SS 2012
14.06.2012

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 9. Übungsblatt

Aufgabe 43

Offenbar ist der Integrand jeweils eine stetige Funktion; wir können daher die Integrale mit Hilfe von Satz 1 aus 20.5 berechnen.

a) Es gilt

$$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} (xy+y^2)\,d(x,y) = \int_0^1 \int_0^1 (xy+y^2)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}xy^2 + \tfrac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^1 dx$$
$$= \int_0^1 \left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}\right) dx = \left[\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{3}x\right]_0^1 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{7}{12}\,.$$

b) Diesmal ergibt sich

$$\iint\limits_{[-1,0]\times[0,2]} \cosh(2x+y)\,d(x,y) = \int_{-1}^0 \int_0^2 \cosh(2x+y)\,dy\,dx = \int_{-1}^0 \big[\sinh(2x+y)\big]_{y=0}^2 dx$$
$$= \int_{-1}^0 \big(\sinh(2x+2) - \sinh(2x)\big)\,dx = \left[\tfrac{1}{2}\cosh(2x+2) - \tfrac{1}{2}\cosh(2x)\right]_{-1}^0$$
$$= \left(\tfrac{1}{2}\cosh 2 - \tfrac{1}{2}\cosh 0\right) - \left(\tfrac{1}{2}\cosh 0 - \tfrac{1}{2}\cosh(-2)\right) = \cosh 2 - 1 = \tfrac{1}{2}(e^2 + e^{-2}) - 1\,.$$

Aufgabe 44

a) Für den Integrationsbereich B gilt:

$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \in [0,1], x \in [y,1]\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [0,1], y \in [0,x]\}$$

Da $f(x,y) = e^{x^2}$ stetig auf B ist, folgt mit Satz 2 in 20.5:

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^x e^{x^2}\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^x dy\, e^{x^2}\,dx = \int_0^1 x e^{x^2}\,dx = \left[\tfrac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = \tfrac{e-1}{2}\,.$$

Bemerkung: Hier ist das innere Integral $\int_y^1 e^{x^2}\,dx$ nicht explizit berechenbar. Für die Bestimmung eines iterierten Integrals kann also die Integrationsreihenfolge wesentlich sein.

b) Für den Integrationsbereich B gilt:

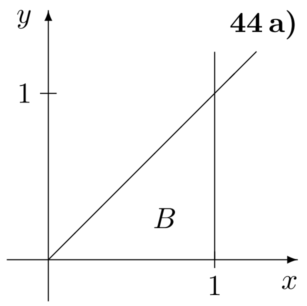
$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \in [0,1], x \in [y, y^2+1]\} = B_1 \cup B_2$$

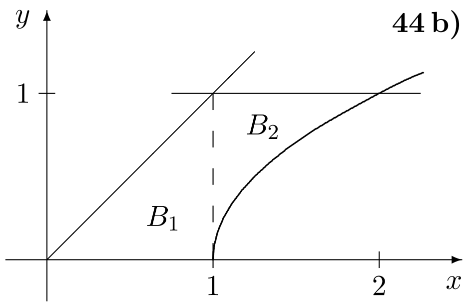
wobei

$$B_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \in [0,1], x \in [y,1]\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [0,1], y \in [0,x]\}$$
$$B_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \in [0,1], x \in [1, y^2+1]\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [1,2], y \in [\sqrt{x-1}, 1]\}$$

Da $f(x,y) = x^2 y$ stetig auf B ist, erhalten wir mit Satz 2 und Bemerkung (b) in 20.5:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_y^{y^2+1} x^2 y \, dx\, dy &= \iint_{B_1} x^2 y \, d(x,y) + \iint_{B_2} x^2 y \, d(x,y) \\
&= \int_0^1 \int_0^x x^2 y \, dy\, dx + \int_1^2 \int_{\sqrt{x-1}}^1 x^2 y \, dy\, dx \\
&= \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2} x^2 y^2\right]_{y=0}^{x} dx + \int_1^2 \left[\tfrac{1}{2} x^2 y^2\right]_{y=\sqrt{x-1}}^{1} dx \\
&= \int_0^1 \tfrac{1}{2} x^4 \, dx + \int_1^2 \left(\tfrac{1}{2} x^2 - \tfrac{1}{2} x^2 (x-1)\right) dx \\
&= \left[\tfrac{1}{10} x^5\right]_{x=0}^{1} + \left[-\tfrac{1}{8} x^4 + \tfrac{1}{3} x^3\right]_{x=1}^{2} = \tfrac{1}{10} + \left(-2 + \tfrac{8}{3} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{67}{120}\,.
\end{aligned}$$





Aufgabe 45

a) Mit $\gamma'(t) = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, 1)$ ergibt sich für jedes $t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned}
\|\gamma'(t)\| &= \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 + 1} \\
&= \sqrt{\cos^2 t - 2t \cos t \sin t + t^2 \sin^2 t + \sin^2 t + 2t \sin t \cos t + t^2 \cos^2 t + 1} = \sqrt{2 + t^2}\,.
\end{aligned}$$

Nach Definition des Kurvenintegrals ist dann

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f\, ds &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\, \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} \left(2t - \sqrt{t^2 \cos^2 t + t^2 \sin^2 t}\right) \sqrt{2 + t^2}\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} t\sqrt{2 + t^2}\, dt = \left[\tfrac{1}{3} (2 + t^2)^{3/2}\right]_0^{2\pi} = \tfrac{1}{3}\left((2 + 4\pi^2)^{3/2} - 2^{3/2}\right) \\
&= \tfrac{2}{3}\sqrt{2}\left((1 + 2\pi^2)^{3/2} - 1\right).
\end{aligned}$$

b) **i)** Definitionsgemäß ist

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \vec{v}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} e^{\cos t} \\ \cos t \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-e^{\cos t} \sin t + \sin t \cos^2 t)\, dt = \left[e^{\cos t} - \tfrac{1}{3} \cos^3 t\right]_{t=0}^{2\pi} = 0\,.
\end{aligned}$$

ii) Wir benutzen wieder die Definition des Kurvenintegrals:

$$\begin{aligned}
\int_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{\ln 2} \vec{v}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^{\ln 2} \begin{pmatrix} \cosh t \\ -\sinh t \\ \sinh t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \\ \cosh t \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{\ln 2} (\cosh^2 t - \sinh^2 t + \sinh t \cosh t)\, dt = \int_0^{\ln 2} (1 + \sinh t \cosh t)\, dt \\
&= \ln 2 + \left[\tfrac{1}{2} \sinh^2 t\right]_0^{\ln 2} = \ln 2 + \tfrac{1}{2} \sinh^2(\ln 2) = \ln 2 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}(e^{\ln 2} - e^{-\ln 2})\right)^2 = \ln 2 + \tfrac{9}{32}\,.
\end{aligned}$$

iii) Die Kurven $\gamma r_1 \colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_1(t) = (t, 0)$, und $\gamma_2 \colon [1,2] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_2(t) = (1, t-1)$, sind regulär mit $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Somit liegt die Situation aus Bemerkung (d) in 20.1 vor:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{v}(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1{}'(t)\, dt + \int_1^2 \vec{v}(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2{}'(t)\, dt \\ &= \int_0^1 \begin{pmatrix} \sin t \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_1^2 \begin{pmatrix} \sin 1 \\ 1 + (t-1)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 \sin t\, dt + \int_1^2 \big(1 + (t-1)^2\big)\, dt = \big[-\cos t\big]_0^1 + \big[t + \tfrac{1}{3}(t-1)^3\big]_1^2 \\ &= (-\cos 1 + 1) + (2 + \tfrac{1}{3} - 1) = \tfrac{7}{3} - \cos 1\,.\end{aligned}$$

c) Schreibe $\vec{f} =: (f_1, f_2)$. Da $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend ist, $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ gilt und die Verträglichkeitsbedingung

$$\partial_1 f_2(x,y) = \partial_1(x^2 + y^2) = 2x = \partial_2(2xy) = \partial_2 f_1(x,y) \qquad \text{auf } \mathbb{R}^2$$

erfüllt ist, stellt $\vec{f}$ ein Potentialfeld dar, d.h. es gibt ein Skalarfeld $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ mit $\vec{f} = \nabla\varphi$. Wegen $\partial_x \varphi(x,y) = f_1(x,y) = 2xy$ ist $\varphi(x,y) = x^2 y + \psi(y)$ für eine stetig differenzierbare Funktion $\psi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Aus $\partial_y \varphi(x,y) = f_2(x,y)$ und $\partial_y \varphi(x,y) = x^2 + \psi'(y)$ folgt $\psi'(y) = y^2$. Dies ist beispielsweise für $\psi(y) = \frac{1}{3}\, y^3$ erfüllt. Somit ist

$$\varphi(x,y) = x^2 y + \frac{1}{3}\, y^3$$

ein Potential von $\vec{f}$ auf $\mathbb{R}^2$. Die Arbeit A ist gleich dem Wert des Kurvenintegrals

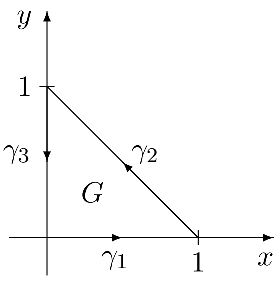
$$A = \int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s},$$

welches wegen $\vec{f} = \nabla\varphi$ nur vom Anfangs- und Endpunkt von γ abhängt:

$$A = \varphi(-1, 2) - \varphi(0,0) = \frac{14}{3}\,.$$

Aufgabe 46

Zunächst berechnen wir $\oint_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}$ direkt mittels der Definition des Kurvenintegrals:



Definiere die regulären Kurven $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\gamma_1(t) = (t, 0)\,, \qquad \gamma_2(t) = (1-t, t)\,, \qquad \gamma_3(t) = (0, 1-t)\,.$$

Dann gilt $\gamma_1(1) = (1,0) = \gamma_2(0)$, $\gamma_2(1) = (0,1) = \gamma_3(0)$ sowie $\gamma_3(1) = (0,0) = \gamma_1(0)$. Da der positiv durchlaufene Rand des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$ durch $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ gegeben ist, erhält man

$$\oint_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_3} \vec{v} \cdot d\vec{s}.$$

Für die drei Kurvenintegrale auf der rechten Seite ergibt sich

$$\int_{\gamma_1} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{v}(\gamma_1(t))\cdot {\gamma_1}'(t)\,dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2+t\cdot 0\\ t^2\cdot 0-0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\,dt = \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}\,,$$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} \vec{v}\cdot d\vec{s} &= \int_0^1 \begin{pmatrix}(1-t)^2+(1-t)t\\ (1-t)^2t-t^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\,dt = \int_0^1 \begin{pmatrix}1-t\\ t-3t^2+t^3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\,dt\\ &= \int_0^1 t^3-3t^2+2t-1\,dt = \big[\frac{1}{4}\,t^4-t^3+t^2-t\big]_0^1 = -\frac{3}{4}\end{aligned}$$

und

$$\int_{\gamma_3} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^1 \begin{pmatrix}0+0\cdot(1-t)\\ 0\cdot(1-t)-(1-t)^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\,dt = \int_0^1 (1-t)^2\,dt = \big[-\frac{1}{3}\,(1-t)^3\big]_0^1 = \frac{1}{3}\,.$$

Zusammen folgt

$$\oint_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{3}-\frac{3}{4}+\frac{1}{3} = -\frac{1}{12}\,.$$

Unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes in der Ebene lässt sich das Kurvenintegral folgendermaßen ausrechnen:
$G\subset\mathbb{R}^2$ sei das Innere des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. Dann ist G ein beschränktes Gebiet. Es seien $v_1(x,y) := x^2+xy$ sowie $v_2(x,y) := x^2y-y^2$ gesetzt. Offenbar ist $\vec{v}=(v_1,v_2)$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar und der Rand ∂G, parametrisiert durch γ, erfüllt die Voraussetzungen des Gaußschen Integralsatzes 20.6. Dieser liefert

$$\oint_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = \iint_G \big(\partial_1 v_2(x,y)-\partial_2 v_1(x,y)\big)\,d(x,y) = \iint_G (2xy-x)\,d(x,y)\,.$$

Da der Integrand stetig ist, gilt

$$\begin{aligned} &= \int_0^1\Big(\int_0^{1-x}(2xy-x)\,dy\Big)\,dx = \int_0^1 \big[xy^2-xy\big]_{y=0}^{1-x}\,dx\\ &= \int_0^1 \big(x(1-x)^2-x(1-x)\big)\,dx = \int_0^1\big(x^3-x^2\big)\,dx = \frac{1}{4}-\frac{1}{3} = -\frac{1}{12}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 47

Setzen wir $\vec{v}(x,y) := (v_1(x,y),v_2(x,y))$ mit $v_1(x,y) := -x^2y$ und $v_2(x,y) := xy$, dann ist $\vec{v}$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar und es gilt $\partial_1 v_2(x,y)-\partial_2 v_1(x,y) = y+x^2$. Der Gaußsche Integralsatz liefert

$$\iint_G (x^2+y)\,d(x,y) = \iint_G \big(\partial_1 v_2(x,y)-\partial_2 v_1(x,y)\big)\,d(x,y) = \oint_{\partial G}\vec{v}\cdot d\vec{s}\,.$$

Der positiv orientierte Rand ∂G der offenen Einheitskreisscheibe G wird parametrisiert durch die reguläre Kurve $\gamma(t)=(\cos t,\sin t)$ mit $0\le t\le 2\pi$. Folglich ergibt sich

$$\begin{aligned}\iint_G (x^2+y)\,d(x,y) &= \int_0^{2\pi}\vec{v}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}-\cos^2 t\,\sin t\\ \cos t\,\sin t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}\,dt\\ &= \int_0^{2\pi}\big(\cos^2 t\,\sin^2 t+\sin t\cos^2 t\big)\,dt \overset{(*)}{=} \int_0^{2\pi}\tfrac{1}{4}\sin^2(2t)\,dt+\int_0^{2\pi}\sin t\cos^2 t\,dt\\ &= \tfrac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2(2t)\,dt-\big[\tfrac{1}{3}\cos^3 t\big]_{t=0}^{2\pi} \overset{(**)}{=} \tfrac{1}{8}\int_0^{4\pi}\sin^2(u)\,du \overset{(***)}{=} \tfrac{1}{8}\cdot 2\pi = \tfrac{\pi}{4}\,.\end{aligned}$$

Hierbei verwendeten wir in $(*)$ das Additionstheorem des Sinus: $2\sin t\,\cos t=\sin(2t)$, in $(**)$ die Substitution $u=2t$ und in $(***)$ die Identität $\int_0^{2\pi}\sin^2(u)\,du=\pi$. Letztere kann man z.B. mit Hilfe von partieller Integration zeigen.

Aufgabe 48

a) Die Funktionen $\vec{v}$, $\vec{w}$ sind stetig differenzierbar und auf ganz $\mathbb{R}^3$ definiert. Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist, gilt: Es handelt sich genau dann um ein Potentialfeld, wenn die Verträglichkeitsbedingung erfüllt ist. Im $\mathbb{R}^3$ ist dies äquivalent dazu, dass die Rotation verschwindet (siehe Definition der Rotation). Schreibe $\vec{v} =: (v_1, v_2, v_3)$. Wegen

$$\partial_2 v_3(x,y,z) = 2y + 3z^2x^2\,, \qquad \partial_3 v_2(x,y,z) = 3z^2x^2 \neq \partial_2 v_3(x,y,z)$$

ist $\nabla \times \vec{v} \neq \vec{0}$. Also ist $\vec{v}$ kein Potentialfeld, d.h. es gibt kein C^1-Skalarfeld $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\vec{v} = \nabla f$.

Für $\vec{w} =: (w_1, w_2, w_3)$ hingegen gilt

$$\partial_2 w_3 = e^z = \partial_3 w_2\,, \qquad \partial_3 w_1 = 2z = \partial_1 w_3\,, \qquad \partial_1 w_2 = 0 = \partial_2 w_1\,.$$

Somit ist $\vec{w}$ ein Potentialfeld, besitzt also ein Potential $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Für dieses Potential muss $\partial_x f(x,y,z) = z^2$ gelten. Integrieren bezüglich x liefert:

$$f(x,y,z) = z^2x + c(y,z)$$

mit einer gewissen Funktion $c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. (Die „Integrationskonstante“ kann also noch von y und z abhängen.) Es folgt $\partial_y f(x,y,z) = \partial_y c(y,z)$, und dies soll $= e^z$ sein. Daher haben wir $c(y,z) = ye^z + d(z)$ mit einer gewissen Funktion $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir wissen also

$$f(x,y,z) = z^2x + ye^z + d(z)\,,$$

und hieraus folgt $\partial_z f(x,y,z) = 2zx + ye^z + d'(z)$. Damit dies gleich der dritten Komponente von $\vec{w}$ wird, muss $d' = 0$ gelten. Wir wählen $d = 0$ und haben ein Potential von $\vec{w}$:

$$f(x,y,z) = z^2x + ye^z\,.$$

b) Bei $\vec{v}$ rechnen wir das Kurvenintegral anhand der Definition aus:

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{v}\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \big[-\tfrac{1}{3}t^3 + t^2\big]_0^1 = \tfrac{2}{3}\,.$$

Bei $\vec{w}$ dagegen können wir auf das oben bestimmte Potential f zurückgreifen:

$$\int_\gamma \vec{w} \cdot d\vec{s} = f\big(\gamma(1)\big) - f\big(\gamma(0)\big) = f(0,1,0) - f(1,0,0) = 1 - 0 = 1\,.$$

Aufgabe 49

a) Wir berechnen das Kurvenintegral zunächst direkt. Es sei $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ mit $\gamma_i : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ $(i = 1,2,3)$ und

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} \pi - t \\ t \end{pmatrix}, \qquad \gamma_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi - t \end{pmatrix}$$

Weiter gilt: $\gamma_1(\pi) = \gamma_2(0)$, $\gamma_2(\pi) = \gamma_3(0)$ sowie $\gamma_3(\pi) = \gamma_1(0)$. Der Rand ∂D wird durch γ parametrisiert und mit Bemerkung (d) in 20.4 folgt:

$$\oint_{\partial D} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \oint_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^{3} \int_{\gamma_i} \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

Für die einzelnen Integrale gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} \vec{v}\cdot d\vec{s} &= \int_0^\pi \vec{v}(\gamma_1(t))\gamma_1{}'(t)\,dt = \int_0^\pi \begin{pmatrix}\sin t\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\,dt = \int_0^\pi \sin t\,dt = 2\\
\int_{\gamma_2} \vec{v}\cdot d\vec{s} &= \int_0^\pi \begin{pmatrix}\sin(\pi-t)\\t(\pi-t)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\,dt = \int_0^\pi -\sin(\pi-t)+t(\pi-t)\,dt\\
&= \int_0^\pi -\sin t+\pi t-t^2\,dt = \left[\cos t+\tfrac{\pi}{2}t^2-\tfrac{1}{3}t^3\right]_0^\pi = \tfrac{\pi^3}{6}-2\\
\int_{\gamma_3} \vec{v}\cdot d\vec{s} &= \int_0^\pi \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\,dt = 0
\end{aligned}$$

Somit folgt $\oint_{\partial D}\vec{v}\cdot d\vec{s} = \frac{\pi^3}{6}$.

Mit Integralsatz: Offenbar sind die Voraussetzungen des Stokesschen Integralsatzes erfüllt, so dass mit dem Satz folgt:

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial D}\vec{v}\cdot d\vec{s} &= \iint_D \left(\nabla\times\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\0\end{pmatrix}\right)\cdot\vec{e}_3\,d(x,y)\\
&= \iint_{\partial D} \partial_x(xy)-\partial_y(\sin x)\,d(x,y) = \iint_{\partial D} y\,d(x,y)\\
&= \int_0^\pi\int_0^{\pi-x} y\,dy\,dx = \int_0^\pi \tfrac{1}{2}(\pi-x)^2\,dx = \int_0^\pi \tfrac{1}{2}x^2-\pi x+\tfrac{1}{2}\pi^2\,dx\\
&= \tfrac{1}{6}\pi^3-\tfrac{1}{2}\pi^3+\tfrac{1}{2}\pi^3 = \tfrac{\pi^3}{6}
\end{aligned}$$

b) Es sei $\gamma=\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$ wie in **a)**. Wir bestimmen zunächst die äußere Einheitsnormale $\vec{N}$: Auf γ_1 gilt $\vec{N}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$, auf γ_2 gilt $\vec{N}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ und auf γ_3 gilt $\vec{N}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$. Somit folgt für die Teilintegrale

$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma_1}\vec{v}\cdot\vec{N}\,ds = 0\\
&\int_{\gamma_2}\vec{v}\cdot\vec{N}\,ds = \int_0^\pi \vec{v}(\gamma_2(t))\cdot\vec{N}(\gamma_2(t))\|\gamma_2{}'(t)\|\,dt = \int_0^\pi \begin{pmatrix}\sin(\pi-t)\\t(\pi-t)\end{pmatrix}\cdot\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\sqrt{2}\,dt\\
&\qquad = \int_0^\pi \sin t+\pi t-t^2\,dt = \frac{\pi^3}{6}+2\\
&\int_{\gamma_3}\vec{v}\cdot\vec{N}\,ds = 0
\end{aligned}$$

und zusammen ergibt sich $\oint_{\partial D} = \sum\limits_{i=1}^{3}\int_{\gamma_i}\vec{v}\cdot\vec{N}\,ds = \frac{\pi^3}{6}+2$.

Mit Hilfe des Divergenzsatzes können wir das Kurvenintegral umformen zu

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D}\vec{v}\cdot\vec{N}\,ds &= \int_D \nabla\cdot v\,d(x,y) = \int_D \cos x+x\,d(x,y)\\
&= \int_0^\pi\int_0^{\pi-x}\cos x+x\,dy\,dx = \int_0^\pi (\pi-x)(\cos x+x)\,dx\\
&= \int_0^\pi \pi\cos x-x\cos x+\pi x-x^2\,dx\\
&= \left[\pi\sin x-\cos x-x\sin x+\tfrac{\pi}{2}x^2-\tfrac{x^3}{3}\right]_0^\pi = \frac{\pi^3}{6}+2.
\end{aligned}$$