Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2012
Institut für Analysis 21.06.2012
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. D. Roth

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 10. Übungsblatt

Aufgabe 50

a) Für $(x, y, z) \in A$ gilt nach Definition der Menge $x \in [1, 2]$ sowie $0 \le x^2 - y^2$, also $y^2 \le x^2$, d.h. $|y| \le |x| = x$ wegen $x > 0$. Mit

$$A_0 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in [1, 2], \, -x \le y \le x\}$$

lässt sich A schreiben als

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; (x, y) \in A_0, \, 0 \le z \le x^2 - y^2\} .$$

Da der Integrand $f(x, y, z) = 1$ stetig ist, erhält man nach 21.2

$$\begin{aligned} I(A) &= \iiint\limits_A d(x, y, z) = \iint\limits_{A_0} \left(\int_0^{x^2-y^2} dz \right) d(x, y) = \int_1^2 \int_{-x}^{x} \int_0^{x^2-y^2} dz\, dy\, dx \\ &= \int_1^2 \int_{-x}^{x} (x^2 - y^2)\, dy\, dx = \int_1^2 \left[x^2 y - \tfrac{1}{3} y^3\right]_{y=-x}^{x} dx = \int_1^2 \tfrac{4}{3} x^3\, dx \\ &= \left[\tfrac{1}{3} x^4\right]_{x=1}^{2} = \tfrac{1}{3}(16 - 1) = 5 . \end{aligned}$$

b) Seien $a, b, c > 0$. Um

$$\operatorname{vol}(E) := \iiint\limits_E d(x, y, z)$$

für die Menge

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \le 1\right\}$$

zu berechnen, führen wir die Substitution $(x, y, z) = (au, bv, cw)$ durch. Die Transformation lautet also $\Phi(u, v, w) = (au, bv, cw)$ und hat die Ableitung

$$\Phi'(u, v, w) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

mit $\det \Phi'(u, v, w) = abc > 0$. Ist $K := \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : \; u^2 + v^2 + w^2 \le 1\}$ gesetzt, so gilt $\Phi(K) = E$, denn

$$(u, v, w) \in K \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{au}{a}\right)^2 + \left(\frac{bv}{b}\right)^2 + \left(\frac{cw}{c}\right)^2 \le 1 \quad \Longleftrightarrow \quad (au, bv, cw) = \Phi(u, v, w) \in E.$$

Daher erhalten wir mit Hilfe der Transformationsformel 21.3

$$\iiint\limits_E d(x, y, z) = \iiint\limits_K abc\, d(u, v, w) = abc \iiint\limits_K d(u, v, w) .$$

Nach Beispiel 21.2 (1) (mit $r = 1$) beträgt das Volumen von K: $\frac{4}{3}\pi$, so dass

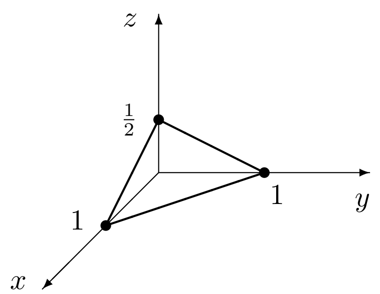
$$\iiint\limits_E d(x, y, z) = abc\, \frac{4\pi}{3}$$

folgt. Alternativ liefern Kugelkoordinaten $(u,v,w) = (r\cos\varphi\,\cos\vartheta, r\sin\varphi\,\cos\vartheta, r\sin\vartheta)$ mit $r \in [0,1]$, $\varphi \in [0,2\pi]$, $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ für $\mathrm{vol}(K)$ ebenfalls

$$\iiint\limits_K d(u,v,w) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi\,dr = \int_0^1\int_0^{2\pi} 2r^2\,d\varphi\,dr = \int_0^1 4\pi r^2\,dr = \frac{4\pi}{3}\,.$$

Aufgabe 51

a)



Die Menge B wird von den Koordinatenebenen und von der Ebene durch die drei Punkte $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,\frac{1}{2})$ begrenzt (siehe Skizze). Damit ist $(x,y,z) \in B$ äquivalent zu

$$0 \le x \le 1\,,\quad 0 \le y \le 1-x\,,\quad 0 \le z \le \tfrac{1}{2}(1-x-y)\,.$$

Bei B handelt es sich also um

$$B = \big\{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ (x,y) \in B_0\,,\ 0 \le z \le \tfrac{1}{2}(1-x-y)\,\big\}\,,$$
$$\text{wobei}\quad B_0 := \big\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le 1-x\,\big\}\,.$$

Da $(x,y,z) \mapsto \sin z$ auf $\mathbb{R}^3$ stetig ist, ergibt sich für das Integral nach (1) aus 21.2

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_B \sin z\,d(x,y,z) &= \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{(1-x-y)/2} \sin z\,dz\,dy\,dx \\
&= \int_0^1\int_0^{1-x}\big[-\cos z\big]_{z=0}^{(1-x-y)/2}\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^{1-x}\Big(-\cos\big(\tfrac{1-x-y}{2}\big)+1\Big)\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 \big[2\sin\big(\tfrac{1-x-y}{2}\big)+y\big]_{y=0}^{1-x}\,dx = \int_0^1\Big(1-x-2\sin\big(\tfrac{1-x}{2}\big)\Big)\,dx \\
&= \big[x-\tfrac{1}{2}x^2-4\cos\big(\tfrac{1-x}{2}\big)\big]_{x=0}^1 = \big(1-\tfrac{1}{2}-4\cos 0\big)+4\cos\big(\tfrac{1}{2}\big) = -\tfrac{7}{2}+4\cos\big(\tfrac{1}{2}\big)\,.
\end{aligned}$$

b) Wir greifen auf Zylinderkoordinaten zurück:

$$x = r\cos\varphi\,,\qquad y = r\sin\varphi\,,\qquad z = z\,,\qquad d(x,y,z) = r\,d(r,\varphi,z)\,.$$

Für $(x,y,z) \in B$ gilt $0 \le z \le 1$, und die zweite B definierende Ungleichung führt auf die Bedingung $r^2 \le (1-z)^2$. Die Menge B ist also charakterisiert durch

$$0 \le z \le 1\,,\qquad 0 \le \varphi \le 2\pi\,,\qquad 0 \le r \le 1-z\,.$$

Die Transformationsformel liefert nun

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_B (x^2+y^2)^2\,e^{2(1-z)^7}\,d(x,y,z) &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{1-z}(r^2)^2\,e^{2(1-z)^7}\,r\,dr\,d\varphi\,dz \\
&= 2\pi\int_0^1\int_0^{1-z} r^5 e^{2(1-z)^7}\,dr\,dz = 2\pi\int_0^1\big[\tfrac{1}{6}r^6\big]_{r=0}^{1-z}\,e^{2(1-z)^7}\,dz \\
&= \int_0^1 \tfrac{1}{3}\pi(1-z)^6\,e^{2(1-z)^7}\,dz = \left[-\frac{\pi e^{2(1-z)^7}}{42}\right]_{z=0}^1 = \frac{\pi(e^2-1)}{42}\,.
\end{aligned}$$

c) Definiere $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ und $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 1 < x^2+y^2+z^2 \leq 2\}$. Dann gilt $B = K \cup S$ und $K \cap S = \emptyset$, und folglich

$$m := \iiint\limits_B \rho(x,y,z)\, d(x,y,z) = \iiint\limits_K \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}\, d(x,y,z) + \iiint\limits_S 2\, d(x,y,z).$$

Da $S = B(0,2)\backslash B(0,1)$, gilt $\mathrm{vol}(S) = \mathrm{vol}(B(2,0)) - \mathrm{vol}(B(0,1))$

$$\iiint\limits_S 2\, d(x,y,z) = 2\left(\frac{4}{3}\pi 2^3 - \frac{4}{3}\pi\right) = \frac{56}{3}\pi.$$

Für das erste Integral benutzen wir Kugelkoordinaten:

$x = r\cos\varphi\,\cos\vartheta, \quad y = r\sin\varphi\,\cos\vartheta, \quad z = r\sin\vartheta \qquad$ mit $r \in [0,1],\ \varphi \in [0,2\pi],\ \vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Die Transformationsformel liefert

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_K \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}\, d(x,y,z) &= \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \rho\big(f(r,\theta,\varphi)\big)\, |J_f\big(f(r,\theta,\varphi)\big)|\, d\varphi\, d\vartheta\, dr \\
&= \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+r^2}\, r^2 \cos\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta\, dr \\
&= 2\pi \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{1+r^2}\, \cos\vartheta\, d\vartheta\, dr \\
&= 4\pi \int_0^1 \frac{r^2}{1+r^2}\, dr = 4\pi \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+r^2}\right) dr \\
&= 4\pi\big(1 - [\arctan r]_{r=0}^1\big) = 4\pi\big(1 - (\tfrac{\pi}{4} - 0)\big) = 4\pi - \pi^2.
\end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich also

$$m = \frac{56}{3}\pi + 4\pi - \pi^2 = \frac{68}{3}\pi - \pi^2.$$

Aufgabe 52

Die Fläche $\mathcal{F} = \big\{(x,y,f(x,y)) :\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \leq 1\big\}$ liegt in expliziter Darstellung vor mit $f(x,y) = x^2+y^2$ bzw. in Parameterdarstellung $\mathcal{F} = \{\vec{g}(x,y) :\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \leq 1\}$ mit

$$\vec{g}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}.$$

Wir setzen $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
A(\mathcal{F}) &= \iint\limits_{\mathcal{F}} do = \iint\limits_B \|\partial_x \vec{g}(x,y) \times \partial_y \vec{g}(x,y)\|\, d(x,y) = \iint\limits_B \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x f(x,y) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y f(x,y) \end{pmatrix} \right\| d(x,y) \\
&= \iint\limits_B \left\| \begin{pmatrix} -\partial_x f(x,y) \\ -\partial_y f(x,y) \\ 1 \end{pmatrix} \right\| d(x,y) = \iint\limits_B \sqrt{(\partial_x f(x,y))^2 + (\partial_y f(x,y))^2 + 1}\, d(x,y) \\
&= \iint\limits_B \sqrt{4x^2+4y^2+1}\, d(x,y).
\end{aligned}$$

Mit Polarkoordinaten ergibt sich

$$A(\mathcal{F}) = \iint\limits_{[0,1]\times[0,2\pi]} \sqrt{4r^2+1}\, r\, d(r,\varphi) = 2\pi \int\limits_0^1 \sqrt{4r^2+1}\, r\, dr = 2\pi\big[\tfrac{1}{12}\,(4r^2+1)^{3/2}\big]_0^1 = \tfrac{\pi}{6}(5^{3/2} - 1).$$

Aufgabe 53

Sei $\mathcal{F}$ die Oberfläche des Kegels und $\vec{N}$ die Einheitsnormale auf $\mathcal{F}$, die ins Äußere von K gerichtet ist. Der Fluß des Vektorfeldes $\vec{f}$ durch die Oberfläche $\mathcal{F}$ des Kegels K nach außen ist nach Vorlesung (Bemerkung in 21.8) gegeben durch

$$\iint_{\partial K} \vec{f} \cdot \vec{N}\, do.$$

Die Oberfläche $\mathcal{F}$ besteht aus dem Kegelmantel und dem Grundkreis. Wir parametrisieren zunächst den Kegelmantel

$$M := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2},\, z \geq 0\right\}$$

durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 2-r \end{pmatrix} =: \vec{g}(r, \varphi) \qquad \text{mit } (r, \varphi) \in [0, 2] \times [0, 2\pi].$$

Dann ist

$$\partial_r \vec{g}(r, \varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor zeigt nach außen. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \vec{f}(\vec{g}(r, \varphi)) \cdot \big(\partial_r \vec{g}(r, \varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r, \varphi)\big) &= \begin{pmatrix} 2-r \\ r\sin\varphi \\ 3-r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix} = (2-r)r\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi + (3-r)r \\ &= (2r - r^2)\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi + (3r - r^2). \end{aligned}$$

Für den Fluß von $\vec{f}$ durch die Mantelfläche M nach außen erhält man

$$\begin{aligned} \iint_M \vec{f} \cdot \vec{N}\, do &= \iint_{[0,2]\times[0,2\pi]} \vec{f}(\vec{g}(r, \varphi)) \cdot \frac{\partial_r \vec{g}(r, \varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r, \varphi)}{\|\partial_r \vec{g}(r, \varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r, \varphi)\|} \|\partial_r \vec{g}(r, \varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r, \varphi)\|\, d(r, \varphi) \\ &= \iint_{[0,2]\times[0,2\pi]} \vec{f}(\vec{g}(r, \varphi)) \cdot \big(\partial_r \vec{g}(r, \varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r, \varphi)\big)\, d(r, \varphi) \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \big((2r - r^2)\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi + (3r - r^2)\big)\, d\varphi\, dr \\ &= \int_0^2 \big(\pi r^2 + (3r - r^2)2\pi\big)\, dr = \left[\pi \frac{r^3}{3} + \left(\frac{3}{2}r^2 - \frac{r^3}{3}\right)2\pi\right]_0^2 = \frac{28}{3}\pi. \end{aligned}$$

Eine Parametrisierung des Grundkreises

$$G := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 \leq 4,\, z = 0\right\}$$

ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} =: \vec{g}(r, \varphi) \qquad \text{mit } (r, \varphi) \in [0, 2] \times [0, 2\pi].$$

Dann ist

$$\partial_r \vec{g}(r, \varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor zeigt nach innen. Wegen

$$\vec{f}(\vec{g}(r, \varphi)) \cdot \big(-\partial_r \vec{g}(r, \varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r, \varphi)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ r\sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} = -r$$

ergibt sich für den Fluß von $\vec{f}$ durch die Grundfläche G nach außen

$$\begin{aligned}\iint\limits_{G} \vec{f} \cdot \vec{N}\, do &= \iint\limits_{[0,2]\times[0,2\pi]} f(\vec{g}(r,\varphi)) \cdot \big(-\partial_r \vec{g}(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r,\varphi)\big)\, d(r,\varphi) \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} -r\, d\varphi\, dr = -\int_0^2 2\pi r\, dr = -4\pi.\end{aligned}$$

Der Fluß von $\vec{f}$ durch die gesamte Oberfläche $\mathcal{F}$ des Kegels K nach außen beträgt somit

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{f} \cdot \vec{N}\, do = \iint\limits_{M} \vec{f} \cdot \vec{N}\, do + \iint\limits_{G} \vec{f} \cdot \vec{N}\, do = \frac{28}{3}\,\pi - 4\pi = \frac{16}{3}\,\pi.$$

Aufgabe 54

Eine Parametrisierung des Kegelmantels $\mathcal{F}$ ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix} =: \vec{g}(r,\varphi) \qquad \text{mit } (r,\varphi) \in [0,1] \times [0,2\pi].$$

Mit

$$\big\|\partial_r \vec{g}(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r,\varphi)\big\| = \left\| \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -r\cos\varphi \\ -r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}\, r$$

und

$$\|\vec{g}(r,\varphi) - \vec{a}\| = \left\| \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r-1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2r^2 - 2r + 1}$$

erhält man

$$\begin{aligned}U(\vec{a}) &= \rho \iint\limits_{\mathcal{F}} \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{a}\|}\, do = \rho \iint\limits_{[0,1]\times[0,2\pi]} \frac{1}{\|\vec{g}(r,\varphi) - \vec{a}\|}\, \big\|\partial_r \vec{g}(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r,\varphi)\big\|\, d(r,\varphi) \\ &= \rho \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2r^2 - 2r + 1}}\, \sqrt{2}\, r\, d\varphi\, dr = 2\sqrt{2}\,\pi\,\rho \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{2r^2 - 2r + 1}}\, dr \overset{\text{Hinweis}}{=} -2\pi\rho \ln(\sqrt{2} - 1).\end{aligned}$$