Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. D. Roth

SS 2012
28.06.2012

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

11. Übungsblatt

Aufgabe 55

Sei $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \le 3\}$ und $\vec{w}$ eine positiv orientierte Parametrisierung von ∂U. Für $(u,v) \in U$ definiere $\vec{r}(u,v) = (u, v, v^2 - u^2)$ und betrachte die Fläche

$$\mathcal{F} = \left\{\vec{r}(u,v) \mid (u,v) \in U\right\},$$

deren Rand $\partial\mathcal{F} = \vec{r}(\partial U)$ durch $\vec{r} \circ \vec{w}$ parametrisiert sei. Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} z - 5y \\ 9x - 3z \\ y - 2x \end{pmatrix}$$

das Kurvenintegral $\oint_{\partial\mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{s}$ unter Verwendung des Stokesschen Integralsatzes.

Aufgabe 56

Die Oberfläche von $Z := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le 1,\ 0 \le z \le 1\right\}$ wird mit $\mathcal{F}$ bezeichnet und es sei

$$\vec{v}(x,y,z) := \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 y \\ x^2 z \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do\,,$$

wobei $\vec{N}$ der Normaleneinheitsvektor ist, der ins Äußere des Zylinders Z weist, auf zwei verschiedene Arten, nämlich

a) mittels der Definition des Oberflächenintegrals;

b) unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes.

Aufgabe 57

In welchen Punkten sind die folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, auf welchen Gebieten sind sie holomorph? Bestimmen Sie gegebenenfalls f'.

a) $f(x + iy) = \sin x\, \sin y - i \cos x\, \cos y \quad (x, y \in \mathbb{R})$

b) $f(z) = z \operatorname{Re} z$

c) $f(z) = \dfrac{z}{\overline{z}} + \dfrac{\overline{z}}{z} \quad$ (für $z \neq 0$)

— bitte wenden —

Aufgabe 58

Berechnen Sie den Wert der folgenden Kurvenintegrale.

a) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{z^2+1}\,dz$ **b)** $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2+2z}\,dz$

c) $\displaystyle\oint_{|z|=4} \frac{ze^{iz}}{(z-\pi)^3}\,dz$ **d)** $\displaystyle\oint_{|z-2|=3} \frac{e^{i\cos z}\sin(z^4+1)-z}{(z-7)^{42}}\,dz$

Hinweis: Es gilt $\frac{1}{z^2+1} = \frac{i/2}{z+i} - \frac{i/2}{z-i}$ für $z \notin \{-i, i\}$ und $\frac{1}{z^2+2z} = \frac{1}{2}(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+2})$ für $z \notin \{-2, 0\}$.

Aufgabe 59

Es sei $R > 0$. Die Kurven γ_1, γ_2, $\gamma_3 : [0, R] \to \mathbb{C}$ seien gegeben durch die Parametrisierungen

$$\gamma_1(t) = t\,, \qquad \gamma_2(t) = R + it\,, \qquad \gamma_3(t) = t(1+i)\,, \qquad \text{jeweils mit } 0 \le t \le R\,.$$

a) Beweisen Sie die Gleichung

$$\int_{\gamma_3} e^{-z^2}\,dz = \int_{\gamma_1} e^{-z^2}\,dz + \int_{\gamma_2} e^{-z^2}\,dz\,.$$

b) Zeigen Sie mittels geeigneter Abschätzungen

$$\int_{\gamma_2} e^{-z^2}\,dz \xrightarrow{R\to\infty} 0\,.$$

c) Berechnen Sie nun den Wert der so genannten *Fresnelschen Integrale*

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_0^\infty \cos(x^2)\,dx\,,$$

indem Sie den Grenzübergang $R \to \infty$ betrachten und $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ verwenden.

Zur Teilnahme an der **Übungsklausur** am Samstag, den 07.07.2012, von 09:00 bis 11:00 Uhr ist keine Anmeldung erforderlich. Die Klausur findet im **Benz-Hörsaal** statt. Weitere Informationen zur Übungsklausur finden Sie auf der Vorlesungshomepage.

Die **Prüfung** zur HM II findet am Montag, den 17.09.2012, statt.

Zur Teilnahme ist eine Anmeldung erforderlich. **Anmeldeschluss: Freitag, der 20.07.2012.**

Weitere Informationen zur Prüfung entnehmen Sie bitte der Vorlesungshomepage

`http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm2phys2012s/`.