Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. D. Roth

SS 2012
28.06.2012

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 11. Übungsblatt

Aufgabe 55

Die Fläche $\mathcal{F}$ liegt in Parameterdarstellung vor mit

$$\vec{g}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ v^2 - u^2 \end{pmatrix}, \quad (u,v) \in U := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq 3\}.$$

Der Stokessche Integralsatz liefert

$$\int_{\partial\mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_{\mathcal{F}} (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{o} = \iint_U (\nabla \times \vec{v})\big(\vec{g}(u,v)\big) \cdot \big(\partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v)\big)\, d(u,v).$$

Nun ist

$$\partial_u \vec{g}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2u \end{pmatrix}, \quad \partial_v \vec{g}(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix}, \qquad \text{also} \qquad \partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v) = \begin{pmatrix} 2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix},$$

und es gilt

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - (-3) \\ 1 - (-2) \\ 9 - (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Folglich ergibt sich

$$\int_{\partial\mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_U \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix} d(u,v) = \iint_U (8u - 6v + 14)\, d(u,v);$$

und mit Polarkoordinaten (U ist die Kreisscheibe um $(0,0)$ mit Radius $\sqrt{3}$) erhält man unter Berücksichtigung von $\int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi = 0$:

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} (8r\cos\varphi - 6r\sin\varphi + 14)\, r\, d\varphi\, dr = \int_0^{\sqrt{3}} 28\pi r\, dr \\ &= 28\pi \big[\tfrac{1}{2} r^2\big]_{r=0}^{\sqrt{3}} = 28\pi \cdot \tfrac{3}{2} = 42\pi. \end{aligned}$$

Aufgabe 56

a) Die Oberfläche $\mathcal{F}$ des Zylinders Z besteht aus drei Teilen, nämlich aus der Bodenfläche $\mathcal{F}_1$, der Mantelfläche $\mathcal{F}_2$ und der oberen Deckfläche $\mathcal{F}_3$.

Die Bodenfläche $\mathcal{F}_1$ können wir durch die Parametrisierung $\vec{g}(u,v) := (u\cos v, u\sin v, 0)$ mit $(u,v) \in U := [0,1] \times [0,2\pi]$ darstellen. Es gilt

$$\partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v) = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -u\sin v \\ u\cos v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u\cos^2 v + u\sin^2 v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich $\vec{N} = (0, 0, -1)$ als äußere Einheitsnormale. (Man teilt $\partial_u \vec{g}(u, v) \times \partial_v \vec{g}(u, v)$ durch die Norm $\|\partial_u \vec{g}(u, v) \times \partial_v \vec{g}(u, v)\|$ und wählt dann noch das Vorzeichen so, dass der Vektor nach außen weist.) Also ist $\iint_{\mathcal{F}_1} \vec{g} \cdot \vec{N}\, do = 0$, denn

$$\big(\vec{v}(\vec{g}(u,v))\big) \cdot \big(\vec{N}(\vec{g}(u,v))\big) = \begin{pmatrix} u^3 \cos^3 v \\ u^3 \cos^2 v \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0\,.$$

Die Mantelfläche $\mathcal{F}_2$ wird durch $\vec{g}(u, v) := (\cos u, \sin u, v)$ mit $(u, v) \in U := [0, 2\pi] \times [0, 1]$ parametrisiert. Wir erhalten

$$\partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v) = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist die äußere Einheitsnormale $\vec{N}$ an $\mathcal{F}_2$. Wegen

$$\big(\vec{v}(\vec{g}(u,v))\big) \cdot \big(\vec{N}(\vec{g}(u,v))\big) = \begin{pmatrix} \cos^3 u \\ \cos^2 u \sin u \\ v \cos^2 u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} = \cos^4 u + \cos^2 u \sin^2 u = \cos^2 u$$

folgt

$$\iint\limits_{\mathcal{F}_2} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do = \iint\limits_{U} \cos^2 u \underbrace{\|\partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v)\|}_{=\cos^2 u + \sin^2 u = 1} d(u,v) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \cos^2 u \, dv\, du = \int_0^{2\pi} \cos^2 u\, du = \pi\,.$$

Es bleibt noch die Deckfläche $\mathcal{F}_3$: Die Parametrisierung $\vec{g}(u, v) := (u \cos v, u \sin v, 1)$ mit $(u, v) \in U := [0, 1] \times [0, 2\pi]$ liefert $\partial_u \vec{g}(u, v) \times \partial_v \vec{g}(u, v) = (0, 0, u)$. Es ist $\vec{N} = (0, 0, 1)$ und damit

$$\big(\vec{v}(\vec{g}(u,v))\big) \cdot \big(\vec{N}(\vec{g}(u,v))\big) = \begin{pmatrix} u^3 \cos^3 v \\ u^3 \cos^2 v \sin v \\ u^2 \cos^2 v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u^2 \cos^2 v\,.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\mathcal{F}_3} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do &= \iint\limits_{U} u^2 \cos^2 v \underbrace{\|\partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v)\|}_{=|u|=u,\ \text{da } u \geq 0} d(u,v) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} u^3 \cos^2 v\, dv\, du \\ &= \left(\int_0^1 u^3\, du\right) \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 v\, dv\right) = \tfrac{1}{4}\pi\,. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do = \sum_{k=1}^{3} \iint\limits_{\mathcal{F}_k} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do = 0 + \pi + \tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{5}{4}\pi\,.$$

b) Nach dem Gaußschen Integralsatz im $\mathbb{R}^3$ ist

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do = \iiint\limits_{Z} (\nabla \cdot \vec{v})\, d(x,y,z)\,.$$

Nun gilt $(\nabla \cdot \vec{v})(x, y, z) = \partial_x(x^3) + \partial_y(x^2 y) + \partial_z(x^2 z) = 3x^2 + x^2 + x^2 = 5x^2$ und mit Zylinderkoordinaten $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$, wobei $r \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $z \in [0, 1]$, folgt

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do &= \iiint\limits_{Z} 5x^2\, d(x,y,z) = \iiint\limits_{[0,1]\times[0,2\pi]\times[0,1]} 5(r\cos\varphi)^2\, r\, d(r,\varphi,z) \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 5r^3 \cos^2 \varphi\, dz\, d\varphi\, dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 5r^3 \cos^2\varphi\, d\varphi\, dr \\ &= 5 \left(\int_0^1 r^3\, dr\right) \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi\, d\varphi\right) = \tfrac{5}{4}\pi\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 57

a) Die Funktionen $u(x,y) := \sin x \sin y$ und $v(x,y) := -\cos x \cos y$ sind offensichtlich auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Es gilt

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= \cos x \, \sin y\,, & u_y(x,y) &= \sin x \, \cos y\,, \\ v_x(x,y) &= \sin x \, \cos y\,, & v_y(x,y) &= \cos x \, \sin y\,. \end{aligned}$$

Wir prüfen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (CRD) nach: $u_x = v_y$ ist immer erfüllt. $u_y(x,y) = -v_x(x,y)$ gilt genau dann, wenn $\sin x \cos y = 0$ ist, also wenn $x = k\pi$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$ oder $y = (m + \frac{1}{2})\pi$ mit einem $m \in \mathbb{Z}$. Genau in diesen Punkten ist f komplex differenzierbar. Da die Menge

$$M := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \text{ oder } \operatorname{Im} z = (m + \tfrac{1}{2})\pi \text{ für ein } m \in \mathbb{Z} \right\}$$

nicht offen ist, liegt nirgends Holomorphie vor. Für $z = x + iy \in M$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ ergibt sich

$$f'(z) = u_x(x,y) + i v_x(x,y) = \cos x \, \sin y + i \underbrace{\sin x \, \cos y}_{=0,\,\text{da } z \in M} = \cos x \, \sin y\,.$$

b) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $f(x+iy) = (x+iy)x = x^2 + ixy =: u(x,y) + iv(x,y)$. Die Funktionen $u, v \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind stetig differenzierbar mit

$$u_x(x,y) = 2x\,, \qquad u_y(x,y) = 0\,, \qquad v_x(x,y) = y\,, \qquad v_y(x,y) = x\,.$$

Wegen

$$\begin{aligned} u_x(x,y) = v_y(x,y) &\iff 2x = x \iff x = 0\,, \\ u_y(x,y) = -v_x(x,y) &\iff 0 = -y \iff y = 0 \end{aligned}$$

sind die CRD nur für $(x,y) = (0,0)$ erfüllt. Deshalb liegt nur in $z = 0$ komplexe Differenzierbarkeit vor. Da $\{0\} \subset \mathbb{C}$ nicht offen ist, ist f nirgends holomorph.

c) Hier ist $f \colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$. Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gilt

$$f(x+iy) = \frac{x+iy}{x-iy} + \frac{x-iy}{x+iy} = \frac{(x+iy)^2}{x^2+y^2} + \frac{(x-iy)^2}{x^2+y^2} = \frac{2x^2 - 2y^2}{x^2+y^2}\,.$$

Wir definieren $u \colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $u(x,y) = \frac{2x^2-2y^2}{x^2+y^2}$, sowie $v \colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $v(x,y) = 0$. Dann erhalten wir für $(x,y) \neq (0,0)$

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) = u(x,y)\,.$$

Offenbar sind u und v auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig differenzierbar; die Quotientenregel liefert

$$u_x(x,y) = \frac{4x(x^2+y^2) - (2x^2-2y^2)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{8xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

und genauso

$$u_y(x,y) = \frac{-8x^2y}{(x^2+y^2)^2}\,,$$

außerdem gilt

$$v_x(x,y) = v_y(x,y) = 0\,.$$

Damit sind die CRD genau dann erfüllt, wenn

$$\frac{8xy^2}{(x^2+y^2)^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{-8x^2y}{(x^2+y^2)^2} = 0\,,$$

also wenn $x = 0$ oder $y = 0$ gilt. Die Funktion f ist somit nur auf der imaginären und der reellen Achse komplex differenzierbar (natürlich mit Ausnahme des Nullpunktes, wo sie gar nicht definiert ist). Hier lautet die Ableitung

$$f'(x+iy) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = 0\,.$$

Da $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \operatorname{Re} z = 0 \text{ oder } \operatorname{Im} z = 0\}$ nicht offen ist, liegt nirgends Holomorphie vor.

Aufgabe 58

a) Wir verwenden bei diesem Integranden die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{i/2}{z+i} - \frac{i/2}{z-i}\,.$$

Da die Punkte $-i$ und i im Inneren der Kreislinie $|z| = 2$ liegen und die Funktion $z \mapsto iz^3/2$ im Gebiet $G = \mathbb{C}$ holomorph ist, ergibt sich mit der Cauchyschen Integralformel

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{z^2+1}\,dz &= \oint_{|z|=2} \frac{iz^3/2}{z-(-i)}\,dz - \oint_{|z|=2} \frac{iz^3/2}{z-i}\,dz \\ &= 2\pi i\,\frac{iz^3}{2}\Big|_{z=-i} - 2\pi i\,\frac{iz^3}{2}\Big|_{z=i} = -\pi(-i)^3 + \pi i^3 = -2\pi i\,.\end{aligned}$$

Alternativ: Die Kreislinie $|z| = 2$ wird parametrisiert durch $\gamma(t) = 2e^{it}$, $(t \in [0, 2\pi])$. Wir definieren die Kurven r und s durch $r = r_1 + r_2$ sowie $s = s_1 + s_2$ wobei

$$\begin{array}{ll} r_1(t) = 2e^{it},\ t \in [0,\pi] & r_2(t) = -2+t,\ t \in [0,4] \\ s_1(t) = 2e^{it},\ t \in [\pi, 2\pi] & s_2(t) = 2-t,\ t \in [0,4] \end{array}$$

(r ist ein geschlossener Weg, der die obere Hälfte des Kreises durchläuft und dann auf der reellen Achse von -2 nach 2 geht. s ist ebenso geschlossen, durchläuft die untere Hälfte des Kreises und dann auf der reellen Achse von 2 nach -2). Insbesondere ist $s_2 = -r_2$, und es gilt somit ($f(z) := \frac{z^3}{z^2+1}$):

$$\oint_{|z|=2} f(z)\,dz = \int_{r_1} f(z)\,dz + \underbrace{\int_{r_2} f(z)\,dz + \int_{s_2} f(z)\,dz}_{=0} + \int_{s_2} f(z)\ ,dz = \oint_r f(z)\,dz + \oint_s f(z)\,dz$$

Betrachten wir die Funktionen $f_1(z) = \frac{z^3}{z+i}$ und $f_2(z) = \frac{z^3}{z-i}$, so sehen wir, dass f_1 in einer Umgebung des von r umlaufenen Gebietes holomorph ist. Genauso ist f_2 in einer Umgebung des von s umlaufenen Gebietes holomorph. Wir können also die Cauchysche Integralformel anwenden und erhalten (beachte, dass $f(z) = \frac{f_1(z)}{z-i} = \frac{f_2(z)}{z+i}$ gilt):

$$\oint_{|z|=2} f(z)\,dz = \oint_r f(z)\,dz + \oint_s f(z)\,dz = 2\pi i f_1(i) + 2\pi i f_2(-i) = 2\pi i\left(\frac{i^3}{2i} + \frac{-i^3}{-2i}\right) = -2\pi i.$$

b) Der Integrand lässt sich hier wie folgt umschreiben

$$\frac{e^z}{z^2+2z} = \frac{e^z}{z(z+2)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{e^z}{z} - \frac{e^z}{z+2}\Big)\,.$$

Der Punkt 0 liegt im Inneren des Integrationsweges, der Punkt -2 dagegen im Äußeren. Folglich liefern die Cauchysche Integralformel und der Cauchysche Integralsatz

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2+2z}\,dz = \frac{1}{2}\left(\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z-0}\,dz - \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z+2}\,dz\right) = \frac{1}{2}\Big(2\pi i\, e^z\big|_{z=0} - 0\Big) = \pi i\,.$$

Alternativ: Die Funktion $g(z) = \frac{e^z}{z+2}$ ist holomorph in einer Umgebung des Gebietes, das von der Kreisline $|z| = 1$ umlaufen wird. Wir können somit direkt die Cauchysche Integralformel anwenden und erhalten:

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z(z+2)}\,dz = 2\pi i g(0) = 2\pi i \frac{1}{2} = \pi i.$$

c) Für die durch $f(z) := ze^{iz}$ definierte, in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion f gilt

$$f'(z) = e^{iz} + z(ie^{iz}) = (1+iz)e^{iz}\,, \qquad f''(z) = ie^{iz} + (1+iz)(ie^{iz}) = (2i - z)e^{iz}\,,$$

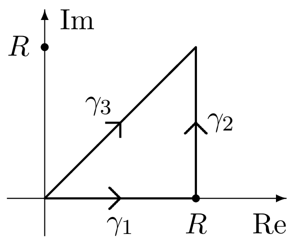
und wegen $|\pi| < 4$ erhalten wir mit der Cauchyschen Integralformel für Ableitungen

$$\oint_{|z|=4} \frac{ze^{iz}}{(z-\pi)^3}\,dz = 2\pi i\,\frac{f''(\pi)}{2!} = \pi i\,(2i-z)e^{iz}\big|_{z=\pi} = \pi i\,(2i-\pi)(-1) = 2\pi + i\pi^2\,.$$

d) Die Nullstelle $z_0 = 7$ des Nenners des Integranden liegt außerhalb der Kreislinie $|z-2| = 3$, denn $|7-2| = 5 > 3$. Der Integrand ist also holomorph in dem konvexen und damit einfach zusammenhängenden Gebiet $G := \{\, z \in \mathbb{C} : |z-2| < 5\,\}$, in welchem auch der glatte, geschlossene Integrationsweg verläuft. Aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt somit

$$\oint_{|z-2|=3} \frac{e^{i\cos z}\sin(z^4+1) - z}{(z-7)^{42}}\,dz = 0\,.$$

Aufgabe 59



a) Im einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathbb{C}$ ist $f(z) := e^{-z^2}$ holomorph, und durch Aneinanderhängen von γ_1, γ_2 und $-\gamma_3$ erhält man eine geschlossene, positiv orientierte Kurve γ. Führen wir die Schreibweise $I(\Gamma) := \int_\Gamma f(z)\,dz$ ein, so liefert der Cauchysche Integralsatz

$$0 = I(\gamma) = I(\gamma_1) + I(\gamma_2) + I(-\gamma_3) = I(\gamma_1) + I(\gamma_2) - I(\gamma_3)\,.$$

Damit ergibt sich $I(\gamma_3) = I(\gamma_1) + I(\gamma_2)$, also die behauptete Gleichung.

b) Es gilt $\gamma_2^2(t) = (R+it)^2 = R^2 + 2iRt - t^2$ und $\gamma_2'(t) = i$. Damit erhalten wir

$$|I(\gamma_2)| = \left|\int_0^R e^{-\gamma_2^2(t)}\gamma_2'(t)\,dt\right| \le \int_0^R \left|e^{-R^2-2iRt+t^2} i\right|\,dt = \int_0^R e^{t^2-R^2}\,dt\,.$$

Wegen der für alle $t \in [0,R]$ gültigen Abschätzung $t^2 \le Rt$ bekommen wir folglich

$$|I(\gamma_2)| \le \int_0^R e^{Rt-R^2}\,dt = \left[\frac{e^{Rt-R^2}}{R}\right]_{t=0}^R = \frac{1-e^{-R^2}}{R} \xrightarrow{R\to\infty} 0\,,$$

und damit ist $I(\gamma_2) \to 0$ für $R \to \infty$ bewiesen.

Bemerkung: Die Standardabschätzung für Kurvenintegrale hätte hier nicht ausgereicht, denn es gilt $L(\gamma_2) = R$ und $\max\{|f(z)| : z \in \gamma_2\} = 1$.

c) Wir betrachten nun noch $I(\gamma_1)$ und $I(\gamma_3)$. Für das erste Kurvenintegral erhalten wir

$$I(\gamma_1) = \int_0^R e^{-\gamma_1^2(t)}\gamma_1'(t)\,dt = \int_0^R e^{-t^2}\,dt \xrightarrow{R\to\infty} \int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,,$$

und wegen $\gamma_3^2(t) = t^2(1+i)^2 = 2it^2$ und $\gamma_3'(t) = 1+i$ gilt

$$I(\gamma_3) = \int_0^R e^{-\gamma_3^2(t)}\gamma_3'(t)\,dt = \int_0^R e^{-2it^2}(1+i)\,dt \xrightarrow{R\to\infty} (1+i)\int_0^\infty e^{-2it^2}\,dt\,.$$

(Dieses uneigentliche Integral muss wegen der Konvergenz von $I(\gamma_1)$ und $I(\gamma_2)$ sowie der in **a)** bewiesenen Gleichung existieren.) Mit der Substitution $x = \sqrt{2}\,t$ ergibt sich

$$I(\gamma_3) \xrightarrow{R\to\infty} (1+i)\int_0^\infty \frac{e^{-ix^2}}{\sqrt{2}}\,dx = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^\infty \big[\cos(x^2) - i\sin(x^2)\big]\,dx\,.$$

Beim Grenzübergang $R \to \infty$ folgt also mit **b)** aus der in **a)** bewiesenen Gleichung

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^\infty \big[\cos(x^2) - i\sin(x^2)\big]\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + 0\,.$$

Für die beiden Integrale $C := \int_0^\infty \cos(x^2)\,dx$ und $S := \int_0^\infty \sin(x^2)\,dx$ hat man somit

$$(1+i)(C - iS) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2\pi}\,, \qquad \text{d. h.} \qquad (C+S) + i(C-S) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2\pi}\,.$$

Hieraus folgen die Gleichungen $C + S = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$ und $C - S = 0$, also ist $C = S = \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}$.