Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. D. Roth

SS 2012
5.07.2012

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 12. Übungsblatt

Aufgabe 60

a) Die Partialbruchzerlegung von f ist gegeben durch $f(z) = \frac{1}{2(z-i)} + \frac{1}{2(z+i)}$. Um eine Laurententwicklung um den Punkt $z_0 = i$ im Gebiet G zu erhalten, müssen wir den zweiten Summanden in eine Reihe entwickeln:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2(z-i)} + \frac{1}{2(z+i)} = \frac{1}{2(z-i)} + \frac{1}{2(z-i+2i)} = \frac{1}{2(z-i)} + \frac{1}{2\cdot 2i\left(1+\frac{z-i}{2i}\right)} \\
&= \frac{1}{2(z-i)} + \frac{1}{4i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-i}{2i}\right)^n = \frac{1}{2(z-i)} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{(2i)^{n+1}} \\
&= \sum_{n=-1}^{\infty} a_n(z-i)^n \qquad \text{wobei} \quad a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{2(2i)^{n+1}}, & n \geq 0 \\ \frac{1}{2}, & n = -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Beachte, dass für $z \in G$ gilt: $|z-i| < 2$ und folglich $\left|\frac{z-i}{2i}\right| < 1$, weshalb die Entwicklung in die geometrische Reihe möglich ist.

b) Für f gilt die Partialbruchzerlegung $f(z) = \frac{1}{2z} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2(z-2)}$. Wir entwickeln die beiden letzten Summanden in eine Reihe um $z_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2z} + \frac{1}{1-z} - \frac{1}{4\left(1-\frac{z}{2}\right)} = \frac{1}{2z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = \frac{1}{2z} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+2}}\right)z^n \\
&= \sum_{n=-1}^{\infty} a_n z^n \qquad \text{wobei} \quad a_n = \begin{cases} 1 - 2^{-(n+2)}, & n \geq 0 \\ \frac{1}{2}, & n = -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Beachte auch hier, dass für alle $z \in G$ gilt: $|z| < 1$, weshalb die Entwicklungen in geometrische Reihen möglich sind.

Aufgabe 61

a) Die Funktion $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^4}$ hat in $z_0 = 1$ einen Pol der Ordnung 4. Mit Hilfe der Formel aus 22.13 (a) sieht man

$$\operatorname{Res}(f;1) = \frac{1}{3!}\left(\frac{d^3}{dz^3}\left((z-1)^4 f(z)\right)\right)\Big|_{z=1} = \frac{1}{6}\left(\frac{d^3}{dz^3}e^z\right)\Big|_{z=1} = \frac{1}{6}e^z\Big|_{z=1} = \frac{e}{6}.$$

b) Da f in $z_0 = 1$ eine wesentliche Singularität besitzt, können wir nicht wie zuvor vorgehen. Wir bestimmen stattdessen die zugehörige Laurentreihe um $z_0 = 1$ und lesen das Residuum ab

$$\begin{aligned}
f(z) &= ze^{\frac{1}{1-z}} = z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{1-z}\right)^n = ((z-1)+1)\sum_{k=-\infty}^{0}\frac{(-1)^k}{(-k)!}(z-1)^k \\
&= \sum_{k=-\infty}^{0}\frac{(-1)^k}{(-k)!}(z-1)^{k+1} + \sum_{k=-\infty}^{0}\frac{(-1)^k}{(-k)!}(z-1)^k \\
&= \sum_{l=-\infty}^{1}\frac{(-1)^{l-1}}{(-(l-1))!}(z-1)^l + \sum_{k=-\infty}^{0}\frac{(-1)^k}{(-k)!}(z-1)^k
\end{aligned}$$

$$= (z-1) + \sum_{k=-\infty}^{0} \left(\frac{(-1)^{k-1}}{(-(k-1))!} + \frac{(-1)^k}{(-k)!} \right) (z-1)^k \,, \qquad z \neq 1\,.$$

Das Residuum von f in 1 ist der Koeffizient von $(z-1)^{-1}$, also

$$\operatorname{Res}(f;1) = \frac{(-1)^{-2}}{2!} + \frac{-1}{1!} = -\frac{1}{2}\,.$$

Aufgabe 62

a) Der Integrand $f(z) := \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}$ besitzt in 1 eine einfache und in -3 eine doppelte Polstelle und ist holomorph auf $\mathbb{C}\setminus\{1,-3\}$. Da innerhalb des Integrationsweges $|z| = 2$ nur die Polstelle 1 liegt, liefert der Residuensatz

$$\oint_{|z|=2} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f;1) = \frac{\mathrm{e}\pi i}{8}\,,$$

denn für das Residuum von f in 1 gilt

$$\operatorname{Res}(f;1) = (z-1)f(z)\Big|_{z=1} = \frac{e^z}{(z+3)^2}\Big|_{z=1} = \frac{e}{16}\,.$$

b) Nun liegen die beiden Polstellen -3 und 1 von f innerhalb des Integrationsweges $|z| = 9$. Deswegen gilt nach dem Residuensatz

$$\oint_{|z|=9} f(z)\,dz = 2\pi i\Big(\operatorname{Res}(f;1) + \operatorname{Res}(f;-3)\Big) = 2\pi i\Big(\frac{e}{16} - \frac{5e^{-3}}{16}\Big) = \frac{(e-5e^{-3})\pi i}{8}\,,$$

da

$$\operatorname{Res}(f;-3) = \left(\frac{d}{dz}\left((z+3)^2 f(z)\right)\right)\Bigg|_{z=-3} = \left(\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{z-1}\right)\right)\Bigg|_{z=-3} = \left(\frac{e^z(z-1)-e^z}{(z-1)^2}\right)\Bigg|_{z=-3}$$
$$= \frac{-5e^{-3}}{16}\,.$$

c) Schreibe $f(z) := \frac{z}{e^{iz}-1}$. Der Nenner von $f(z)$ wird genau dann 0, wenn $z = 2k\pi$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$ gilt. Von diesen Punkten liegt nur $z = 0$ im Inneren des Kreises $|z| = 1$. Daher ist

$$\oint_{|z|=1} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f;0)\,.$$

Nun sieht man anhand der Darstellung

$$f(z) = \frac{z}{e^{iz}-1} = \frac{z}{\left(1 + iz + \frac{1}{2}(iz)^2 + \cdots\right) - 1} = \frac{z}{iz - \frac{1}{2}z^2 + \cdots} = \frac{1}{i - \frac{1}{2}z + \cdots}\,,$$

dass in $z = 0$ eine hebbare Singularität von f vorliegt. Deshalb gilt $\operatorname{Res}(f;0) = 0$ und das Integral hat den Wert 0.

d) Sei $f(z) := e^{\frac{z}{1-z}}$. Hier liefert der Residuensatz

$$\oint_{|z|=2} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f;1)\,.$$

Um das Residuum $\operatorname{Res}(f;1)$ zu berechnen, betrachten wir die Laurententwicklung von f um 1

$$f(z) = \exp\left(\frac{z}{1-z}\right) = \exp\left(-1 + \frac{1}{1-z}\right) = e^{-1}e^{-1/(z-1)} = e^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}(z-1)^{-k}\,;$$

der Koeffizient von $(z-1)^{-1}$ lautet $-e^{-1}$. Also ist $\operatorname{Res}(f;1) = -e^{-1}$ und damit

$$\oint_{|z|=2} \exp\left(\frac{z}{1-z}\right) dz = -\frac{2\pi i}{e}\,.$$

e) Der Integrand $f(z) := \frac{2z}{(z-1)(z+2)(z+i)}$ besitzt in $1, -2, -i$ jeweils einen Pol erster Ordnung und ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{1, -2, -i\}$. Da sich alle Polstellen im Inneren von G befinden, ergibt sich nach dem Residuensatz

$$\oint_{\partial G} f(z)\,dz = 2\pi i \Big(\operatorname{Res}(f;1) + \operatorname{Res}(f;-2) + \operatorname{Res}(f;-i)\Big)\,.$$

Wir berechnen nun die Residuen von f in den (einfachen) Polstellen

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f;1) &= (z-1)f(z)\Big|_{z=1} = \frac{2z}{(z+2)(z+i)}\Big|_{z=1} = \frac{2}{3(1+i)} = \frac{1}{3}\,(1-i)\,,\\
\operatorname{Res}(f;-2) &= (z+2)f(z)\Big|_{z=-2} = \frac{2z}{(z-1)(z+i)}\Big|_{z=-2} = \frac{4}{3(-2+i)} = -\frac{4}{15}\,(2+i)\,,\\
\operatorname{Res}(f;-i) &= (z+i)f(z)\Big|_{z=-i} = \frac{2z}{(z-1)(z+2)}\Big|_{z=-i} = \frac{2i}{(i+1)(-i+2)} = \frac{1}{5}\,(1+3i)\,.
\end{aligned}$$

Hiermit ist

$$\oint_{\partial G} f(z)\,dz = 2\pi i \Big(\frac{1}{3}\,(1-i) - \frac{4}{15}\,(2+i) + \frac{1}{5}\,(1+3i)\Big) = 0\,.$$

Aufgabe 63

Als Hintereinanderausführung holomorpher Funktionen ist die Funktion f auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Sie lässt sich also um $z_0 = 0$ in eine Potenzreihe entwickeln

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,z^n\,.$$

Diese Potenzreihe konvergiert auf der größten Kreisscheibe um $z_0 = 0$, auf der f holomorph ist. Hier konvergiert die Potenzreihe also für jedes $z \in \mathbb{C}$.
Der Integrand $zf(1/z)$ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und für $z \neq 0$, insbesondere also für $0 < |z| < 1$, gilt nach den obigen Überlegungen

$$zf(1/z) = z\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,z^{1-n}\,.$$

Nach dem Residuensatz gilt dann

$$\oint_{|z|=1/2} ze^{\sin(1/z)}\,dz = \int_{|z|=1/2} zf(1/z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(zf(1/z);0)\,,$$

und Ablesen an der Laurentreihe für $zf(1/z)$ ergibt

$$= 2\pi i\,\frac{f''(0)}{2}\,.$$

Wegen $f'(z) = \cos(z)f(z)$, $f''(z) = -\sin(z)f(z) + \cos^2(z)f(z)$ und $f(0) = 1$ ist $f''(0) = 1$. Das Integral ist also gleich

$$2\pi i\,\frac{1}{2} = \pi i\,.$$

Aufgabe 64

Da $\mathbb{C}$ einfach zusammenhängend ist, gilt: u ist genau dann Realteil einer holomorphen Funktion, wenn u harmonisch ist, wenn also $\Delta u = 0$ gilt. Wegen

$$\begin{aligned}
\Delta u(x,y) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)\\
&= 12x^2 + 2\lambda y^2 + 12y^2 + 2\lambda x^2 = (12 + 2\lambda)(x^2 + y^2)
\end{aligned}$$

ist dies genau für $\lambda = -6$ der Fall.
Wir betrachten im folgenden daher $u(x,y) = x^4 + y^4 - 6x^2y^2$. Nun benötigen wir alle Funktionen v mit $\partial_x v = -\partial_y u$ und $\partial_y v = \partial_x u$. Für diese v ist die Funktion $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ dann nach Konstruktion holomorph und u ist Realteil von f. Die erste Forderung an v lautet

$$\partial_x v(x,y) = -\partial_y u(x,y) = -(4y^3 - 12x^2y) = -4y^3 + 12x^2y\,.$$

Hieraus folgt durch Integration bezüglich x: Es gilt $v(x,y) = -4xy^3 + 4x^3y + c(y)$ mit einer gewissen Funktion $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Damit ergibt sich

$$\partial_y v(x,y) = -12xy^2 + 4x^3 + c'(y)\,,$$

und dies soll $= \partial_x u(x,y) = 4x^3 - 12xy^2$ sein. Dazu muss $c'(y) = 0$ gelten, also c konstant sein. Damit haben wir die holomorphe Funktion f gefunden

$$\begin{aligned} f(x+iy) &= u(x,y) + iv(x,y) = x^4 + y^4 - 6x^2y^2 + i(-4xy^3 + 4x^3y + c) \\ &= x^4 + 4ix^3y - 6x^2y^2 - 4ixy^3 + y^4 + ic = (x+iy)^4 + ic \qquad (c \in \mathbb{R})\,. \end{aligned}$$

Wir erhalten also: Genau die Funktionen der Form $f(z) = z^4 + ic$, wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig, haben $u(x,y) = x^4 + y^4 - 6x^2y^2$ als Realteil.

Aufgabe 65

a) Definitionsgemäß gilt für die Hauptzweige von Potenzfunktion und Logarithmus

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log} z}\,, \qquad \operatorname{Log} z = \log|z| + i \operatorname{Arg} z\,, \quad \text{wobei } \operatorname{Arg} z \in (-\pi,\pi),\ \alpha \in \mathbb{C}\,.$$

- Mit $\operatorname{Log}(1+i) = \log|1+i| + i\operatorname{Arg}(1+i) = \log\sqrt{2} + i\pi/4$ ergibt sich

$$(1+i)^i = e^{i\operatorname{Log}(1+i)} = e^{i(\log\sqrt{2} + i\pi/4)} = e^{i\log\sqrt{2} - \pi/4} = e^{-\pi/4}\big(\cos(\log\sqrt{2}\,) + i\sin(\log\sqrt{2}\,)\big)\,.$$

Man liest ab: $\operatorname{Re}((1+i)^i) = e^{-\pi/4}\cos(\frac{1}{2}\log 2)$ und $\operatorname{Im}((1+i)^i) = e^{-\pi/4}\sin(\frac{1}{2}\log 2)$.

- Wegen $\operatorname{Log} i = \log|i| + i\operatorname{Arg} i = i\pi/2$ gilt $i^i = e^{i(i\pi/2)} = e^{-\pi/2}$, also

$$i^{(i^i)} = i^{(e^{-\pi/2})} = \exp(e^{-\pi/2}\operatorname{Log} i) = \exp(\tfrac{\pi}{2}e^{-\pi/2}i) = \cos(\tfrac{\pi}{2}e^{-\pi/2}) + i\sin(\tfrac{\pi}{2}e^{-\pi/2})\,.$$

Man sieht: $\operatorname{Re}(i^{(i^i)}) = \cos(\frac{\pi}{2}e^{-\pi/2})$ und $\operatorname{Im}(i^{(i^i)}) = \sin(\frac{\pi}{2}e^{-\pi/2})$.

- Wegen $\operatorname{Log} i = i\pi/2$ ergibt sich

$$\operatorname{Log}(\operatorname{Log} i) = \operatorname{Log}(i\pi/2) = \log|i\pi/2| + i\operatorname{Arg}(i\pi/2) = \log(\pi/2) + i\pi/2\,.$$

Damit erhalten wir

$$(\operatorname{Log} i)^i = e^{i\operatorname{Log}(\operatorname{Log} i)} = e^{i\log(\pi/2) - \pi/2} = e^{-\pi/2}\cos\big(\log(\pi/2)\big) + ie^{-\pi/2}\sin\big(\log(\pi/2)\big)\,,$$

und Real- und Imaginärteil können unmittelbar abgelesen werden.

b) Die Gleichung $e^{1/z} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ist genau dann erfüllt, wenn

$$\frac{1}{z} = i\,\frac{\pi}{2} + 2k\pi i = i\,\frac{(1+4k)\pi}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = -i\,\frac{2}{(1+4k)\pi}$$

mit einem gewissen $k \in \mathbb{Z}$ gilt, d.h. $\{z \in \mathbb{C} \mid e^{1/z} = i\} = \{\frac{-2i}{(1+4k)\pi} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Aufgabe 66

Vorüberlegung:

(i) Eine Gerade in der komplexen Ebene lässt sich schreiben als $\{z \in \mathbb{C} : z = a + bt, t \in \mathbb{R}\}$ wobei $a, b \in \mathbb{C}$ fest.

Eine weitere Möglichkeit, Geraden zu schreiben ist die sogenannte Hessesche Normalform $\{z \in \mathbb{C} : \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0\}$ wobei $\beta \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und $\gamma \in \mathbb{R}$. Durch äquivalente Umformungen kann man zeigen, dass sich beiden Schreibweisen ineinander überführen lassen (t sei im folgenden reell):

$$\beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0 \iff 2\,\mathrm{Re}(\beta z) = -\gamma \iff \beta z = -\frac{\gamma}{2} + it \iff z = -\frac{\gamma}{2\beta} + \frac{i}{\beta} t$$

(ii) Der Kreis in der komplexen Ebene um $z_0 \in \mathbb{C}$ mit Radius $r > 0$ lässt sich beschreiben durch $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ bzw. $\{z \in \mathbb{C} : z = z_0 + re^{it}, t \in [0, 2\pi]\}$. Eine weitere Schreibweise ist gegeben durch $\{z \in \mathbb{C} : |z|^2 + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0\}$ wobei $\beta \in \mathbb{C}$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ fest mit $|\beta|^2 > \gamma$. Es gilt:

$$|z|^2 + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0 \iff (z + \bar{\beta})(\bar{z} + \beta) = |\beta|^2 - \gamma \iff |z - (-\bar{\beta})| = \sqrt{|\beta|^2 - \gamma}$$

Es sei $w \in \hat{\mathbb{C}}$ das Bild von $z \in \hat{\mathbb{C}}$ unter f, d.h. $w = f(z) = \frac{i-z}{1+z}$. Dann gilt:

$$i - z = w + zw \iff -z - wz = w - i \iff z(1 + w) = i - w \iff z = \frac{i - w}{1 + w}.$$

a) Für alle $z \in \mathbb{C}$ auf der Einheitskreislinie gilt: $z\bar{z} - 1 = 0$. Wir setzen nun die für z gewonnene Darstellung durch das Bild w ein und formen diesen Ausdruck um, bis wir erkennen, welche Gleichung die Bildpunkte w erfüllen:

$$\begin{aligned} z\bar{z} - 1 = 0 &\iff \frac{i - w}{1 + w} \cdot \frac{-i - \overline{w}}{1 + \overline{w}} - 1 = 0 \iff \frac{(i - w) \cdot (-i - \overline{w})}{1 + \overline{w} + w + |w|^2} - 1 = 0 \\ &\iff 1 - i\overline{w} + iw + |w|^2 - 1 - \overline{w} - w - |w|^2 = 0 \\ &\iff w(-1 + i) + \overline{w}(-1 - i) = 0 \\ &\iff (-1 + i)w + \overline{(-1 + i)}\overline{w} = 0 \end{aligned}$$

Somit ist das Bild der Einheitskreislinie nach (i) die Gerade durch den Ursprung ($\gamma = 0$) und den Punkt $\frac{i}{\beta} = \frac{i}{-1+i} = \frac{1-i}{2}$.

b) Für alle Punkte auf der rellen Achse gilt: $\mathrm{Im}(z) = 0$, also $z - \bar{z} = 0$. Wir gehen wie im a)-Teil vor:

$$\begin{aligned} z - \bar{z} = 0 &\iff \frac{i - w}{1 + w} - \frac{-i - \overline{w}}{1 + \overline{w}} = 0 \iff (i - w)(1 + \overline{w}) + (i + \overline{w})(1 + w) = 0 \\ &\iff i + i\overline{w} - w - |w|^2 + i + iw + \overline{w} + |w|^2 = 0 \\ &\iff w(-1 + i) + \overline{w}(1 + i) + 2i = 0 \\ &\overset{\cdot i}{\iff} w(-1 - i) + \overline{w}(-1 + i) - 2 = 0 \end{aligned}$$

Das Bild ist nach (i) wieder eine Gerade, in diesem Fall durch die Punkte $-\frac{1}{1+i} = \frac{i-1}{2}$ und -1 ($t = 0, 1$ eingesetzt).

c) Für die Punkte auf der imaginären Achse gilt:

$$\begin{aligned} z + \bar{z} = 0 &\iff \frac{i - w}{1 + w} + \frac{-i - \overline{w}}{1 + \overline{w}} = 0 \iff (i - w)(1 + \overline{w}) - (i + \overline{w})(1 + w) = 0 \\ &\iff i - w + i\bar{w} - |w|^2 - i - iw - \overline{w} - |w|^2 = 0 \\ &\iff 2|w|^2 + w(1 + i) + \overline{w}(1 - i) = 0 \iff |w|^2 + \frac{1 + i}{2} w + \overline{\frac{1 + i}{2}}\,\overline{w} = 0 \end{aligned}$$

Nach (ii) ist dies ein Kreis um $\frac{i-1}{2}$ mit Radius $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Aufgabe 67

Sei $w \in \hat{\mathbb{C}}$ das Bild der Möbiustransformation unter z, d.h. $w = \frac{z}{1-z}$. Dies ist äquivalent zu $z = \frac{w}{1+w}$. Es sei $K_r = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = r\}$. Wir bestimmen zunächst das Bild des Kreises K_1:

$$\begin{aligned} z\bar{z} - 1 = 0 &\iff \frac{w}{1+w} \cdot \frac{\overline{w}}{1+\overline{w}} - 1 = 0 \iff w\overline{w} - 1 - \overline{w} - w - w\overline{w} = 0 \\ &\iff w + \overline{w} + 1 = 0 \iff 2\,\mathrm{Re}(w) = -1 \end{aligned}$$

Dies ist die zur imaginären Achse parallele Gerade durch den Punkt $-\frac{1}{2}$.
Betrachten wir nun die Kreise K_r mit $1 < r \leq 2$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} z\bar{z} - r^2 = 0 &\iff \frac{w}{1+w} \cdot \frac{\overline{w}}{1+\overline{w}} - r^2 = 0 \iff |w|^2 - r^2 - r^2 w - r^2\overline{w} - r^2|w|^2 = 0 \\ &\iff |w|^2 - \frac{r^2}{1-r^2} w - \frac{r^2}{1-r^2}\overline{w} - \frac{r^2}{1-r^2} = 0 \\ &\iff |w|^2 + \frac{r^2}{r^2-1} w + \frac{r^2}{r^2-1}\overline{w} + \frac{r^2}{r^2-1} = 0 \end{aligned}$$

Dies ist ein Kreis um $-\frac{r^2}{r^2-1}$ mit Radius $R = \sqrt{\left(\frac{r^2}{r^2-1}\right)^2 - \frac{r^2}{r^2-1}} = \left|\frac{r}{r^2-1}\right| \overset{r \geq 1}{=} \frac{r}{r^2-1}$.