Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. D. Roth

SS 2012
19.07.2012

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

14. Übungsblatt

Aufgabe 72

Zu $k \in \mathbb{N}_0$ definiere $h_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$h_k(x) = e^{x^2/2} \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

a) Zeigen Sie: Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $h_{k+1}(x) = h_k'(x) - xh_k(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Beweisen Sie mit Hilfe von a), dass

$$\mathscr{F} h_k = (-i)^k \sqrt{2\pi}\, h_k$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt.

c) Zeigen Sie per Induktion für alle $k \in \mathbb{N}$ die Identität $\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} e^{-x^2} = -2x \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2} - 2k \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} e^{-x^2}$ und folgern Sie daraus die Rekursionsformel $h_{k+1}(x) = -2xh_k(x) - 2kh_{k-1}(x)$.

d) Zeigen Sie, dass für alle $n, m \in N_0$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_n(x) h_m(x)\, dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{n,m}.$$

Hinweis: Benutzen Sie a) und c) sowie partielle Integration.

Aufgabe 73

a) Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und absolut integrierbar und ist $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig, beschränkt und absolut integrierbar sowie $\mathscr{F} g$ absolut integrierbar, so gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F} f(\xi)\, \overline{\mathscr{F} g(\xi)}\, d\xi.$$

b) Beweisen Sie: Gilt unter den Voraussetzungen des a)-Teils

$$\operatorname{supp} \mathscr{F} f \cap \operatorname{supp} \mathscr{F} g = \emptyset\,,$$

dann ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \overline{g(t)}\, dt = 0\,.$$

Hinweis: Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bezeichnet $\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R} : \ f(x) \neq 0\}}$ den Träger von f.

Aufgabe 74

Zeigen Sie, dass in der Heisenbergschen Unschärferelation Gleichheit genau dann eintritt, wenn $\psi(x) = ce^{-ax^2}$ mit $c \in \mathbb{C}$ und $a > 0$.

Aufgabe 75

Der Schwarz-Raum $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ der schnell fallenden Funktionen ist definiert durch

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}) = \left\{ \varphi \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : \ \forall n, m \in \mathbb{N}_0 : \ \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^n \frac{d^m}{dx^m} \varphi(x) \right| < \infty \right\}.$$

Beweisen Sie, dass die Fouriertransformation $\mathscr{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}(\mathbb{R})$ bijektiv ist.

Das Übungsblatt wird in der Übung am 20.07.2012 besprochen.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg für die Klausur
und alles Gute für Ihr weiteres Studium!

Am Montag, den 10.9.2012 findet von 11.30-13.00 Uhr im Raum 1C-03 (Allianz-Gebäude) eine Sprechstunde der Tutoren statt.

Die **Prüfung** zur HM II findet am Montag, den 17.09.2012, statt.

Zur Teilnahme ist eine Anmeldung erforderlich. **Anmeldeschluss: Freitag, der 20.07.2012.**

Weitere Informationen zur Prüfung entnehmen Sie bitte der Vorlesungshomepage
http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm2phys2012s/.