Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. D. Roth

SS 2012
19.07.2012

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 14. Übungsblatt

Aufgabe 72

a) Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$h_{k+1}(x) = h_k'(x) - x h_k(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,, \tag{1}$$

denn es ist

$$h_k'(x) - x h_k(x) = x\, e^{x^2/2} \frac{d^k}{dx^k}\, e^{-x^2} + e^{x^2/2} \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\, e^{-x^2} - x\, e^{x^2/2} \frac{d^k}{dx^k}\, e^{-x^2} = h_{k+1}(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

b) Wir beweisen die behauptete Identität $\mathscr{F} h_k = (-i)^k \sqrt{2\pi}\, h_k$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ durch vollständige Induktion über $k \in \mathbb{N}_0$:

IA: Wegen $h_0(x) = e^{-x^2/2}$, $x \in \mathbb{R}$, ist (s. Beispiel 23.8)

$$\mathscr{F} h_0(\xi) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\xi^2/2}\,, \qquad \xi \in \mathbb{R}\,.$$

IV: Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Für dieses k gelte $\mathscr{F} h_k = (-i)^k \sqrt{2\pi}\, h_k$.

IS: $k \rightsquigarrow k+1$: Für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ gilt nach 23.7 (d) und (e)

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(h_{k+1})(\xi) &\overset{(1)}{=} \mathscr{F}(h_k')(\xi) - \mathscr{F}\big(x \mapsto x h_k(x)\big)(\xi) = (i\xi)\,(\mathscr{F} h_k)(\xi) - i\,\frac{d}{d\xi}\,(\mathscr{F} h_k)(\xi) \\
&\overset{\text{IV}}{=} (i\xi)\,(-i)^k \sqrt{2\pi}\, h_k(\xi) - i\,\frac{d}{d\xi}\,\big((-i)^k \sqrt{2\pi}\, h_k\big)(\xi) \\
&= (-i)^{k+1} \sqrt{2\pi}\,\Big(\frac{d}{d\xi}\, h_k(\xi) - \xi h_k(\xi)\Big) \\
&\overset{(1)}{=} (-i)^{k+1} \sqrt{2\pi}\, h_{k+1}(\xi)\,.
\end{aligned}$$

c) IA: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\frac{d^2}{dx^2} e^{-x^2} = \frac{d}{dx}(-2x e^{-x^2}) = -2e^{-x^2} - 2x \frac{d}{dx} e^{-x^2}$$

IV: Sei $k \in \mathbb{N}$. Für dieses k gelte: $\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} e^{-x^2} = -2x \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2} - 2k \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} e^{-x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$.

IS: $k \rightsquigarrow k+1$: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{d^{k+2}}{dx^{k+2}} e^{-x^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} e^{-x^2}\right) \overset{\text{IV}}{=} \frac{d}{dx}\left(-2x \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2} - 2k \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} e^{-x^2}\right) \\
&= -2 \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2} - 2x \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} e^{-x^2} - 2k \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2} \\
&= -2x \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} e^{-x^2} - 2(k+1) \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2}
\end{aligned}$$

Also gilt für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} e^{-x^2} = -2x \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2} - 2k \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} e^{-x^2}.$$

Multiplizieren dieser Gleichung mit $e^{x^2/2}$ liefert die Rekursionsformel

$$h_{k+1}(x) = -2x h_k(x) - 2k h_{k-1}(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

d) Gleichsetzen der beiden Formeln in a) und c) liefert für alle $k \in \mathbb{N}$ die Formel:

$$h_k'(x) - xh_k(x) = -2xh_k(x) - 2kh_{k-1}(x) \iff h_k'(x) + xh_k(x) = -2kh_{k-1}(x).$$

Seien nun $m, n \in \mathbb{N}_0$, o.B.d.A. gelte $n \geq m$. Wir betrachten zunächst den Fall $m = 0$. Es gilt: $h_0(x) = e^{-x^2/2}$ und somit

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_n(x)h_0(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}\,dx$$

Ist $n = 0$, so gilt $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$. Für $n \geq 1$ folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}\,dx = \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}e^{-x^2}\right]_{x=-\infty}^{\infty} = 0,$$

da $\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}e^{-x^2} = p(x)e^{-x^2}$ mit einem Poylnom $p(x)$ und $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^j e^{-x^2} = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$.

Ist $m \geq 1$ so folgt mit partieller Integration:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} h_n(x)h_m(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}\right) e^{x^2/2}h_m(x)\,dx \\
&= \left[e^{x^2/2}h_m(t)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}e^{-x^2}\right]_{x=-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2/2}\underbrace{(xh_m(x) + h_m'(x))}_{=-2mh_{m-1}(x)}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}e^{-x^2}\,dx \\
&= 2m\int_{-\infty}^{\infty} h_{m-1}(x)h_{n-1}(x)\,dx
\end{aligned}$$

Induktiv folgt (da $n \geq m$):

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_n(x)h_m(x)\,dx = 2^m m! \int_{-\infty}^{\infty} h_{n-m}(x)h_0(x)\,dx = 2^m m!\sqrt{\pi}\delta_{n,m}.$$

Aufgabe 73

a) Da f und $\mathscr{F}g$ absolut integrierbar, folgt mit 23.9 (Dancing-Hat-Lemma):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F}f(\xi)\overline{\mathscr{F}g(\xi)}\,d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathscr{F}\{\overline{\mathscr{F}g}\}(x)\,dx \tag{2}$$

Weiter gilt für alle $\xi \in \mathbb{R}$: $\overline{\mathscr{F}g(\xi)} = \mathscr{F}\{\overline{g}\}(-\xi)$ und aufgrund der Voraussetzungen an g folgt mit der Umkehrformel 23.10

$$\mathscr{F}\{\overline{\mathscr{F}g}\}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}\overline{\mathscr{F}g(\xi)}\,d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}\mathscr{F}\{\overline{g}\}(-\xi)\,d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\mathscr{F}\{\overline{g}\}(\xi)\,d\xi = 2\pi\overline{g(x)}$$

Einsetzen in (2) liefert die Behauptung.

b) Mit $\operatorname{supp}\mathscr{F}f \cap \operatorname{supp}\mathscr{F}g = \emptyset$ gilt auch $\operatorname{supp}\mathscr{F}f \cap \operatorname{supp}\overline{\mathscr{F}g} = \emptyset$. Somit ist

$$\mathscr{F}f(\xi)\,\overline{\mathscr{F}g(\xi)} = 0 \qquad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}\,.$$

Mit Hilfe des a)-Teils erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\mathscr{F}f(\xi)\,\overline{\mathscr{F}g(\xi)}}_{=0}\,d\xi = 0\,.$$

Aufgabe 74

Im Beweis der Heisenbergschen Unschärferelation sieht man sofort, dass die Ungleichung nur aus der Abschätzung

$$|\operatorname{Re}(x\psi|\psi')| \leq |(x\psi|\psi')| \leq \|x\psi\|_2\|\psi'\|_2$$

erzeugt wird. Damit Gleichheit eintritt, muss also

$$|\operatorname{Re}(x\psi|\psi')| = |(x\psi|\psi')| = \|x\psi\|_2\|\psi'\|_2$$

gelten. Aus der ersten Gleichung folgt $(x\psi|\psi') \in \mathbb{R}$ und da die zweite Gleichung nur dann erfüllt ist, wenn $x\psi$ und ψ' linear abhängig sind, muss $bx\psi(x) = \psi'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und ein beliebiges $b \in \mathbb{C}$ gelten. Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist gegeben durch $\psi(x) = \frac{c}{2}e^{bx^2}$, wobei $c \in \mathbb{C}$ wieder beliebig. Wir berechnen nun $(x\psi|\psi')$:

$$(x\psi|\psi') = \int_{-\infty}^{\infty} x\tfrac{c}{2}e^{bx^2}\overline{cbxe^{bx^2}}\,dx = \frac{|c|^2}{2}\bar{b}\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{2\operatorname{Re}(b)x^2}\,dx$$

Offenbar ist $(x\psi|\psi') \in \mathbb{R}$ nur erfüllt, falls $b \in \mathbb{R}$. Da ψ eine absolut integrierbare Funktion sein soll (Voraussetzung der Heisenbergschen Unschärferelation), muss $\operatorname{Re}(b) < 0$ sein, d.h. $b = -a$ mit $a > 0$. Insgesamt folgt also $\psi(x) = ce^{-ax^2}$ mit $c \in \mathbb{C}$ und $a > 0$.

Behauptung: Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ quadratintegrierbar, $f, g \neq 0$. Dann gilt:

$$(f|g) = \|f\|_2\|g\|_2 \iff f \text{ und } g \text{ sind linear abhängig.}$$

Die Richtung "$\Leftarrow$" ist leicht.
Zeige "$\Rightarrow$": Sei $\mu = \frac{(f|g)}{\|g\|^2} \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$(f - \mu g|f - \mu g) = (f|f) - \mu(g|f) - \bar{\mu}(f|g) + |\mu|^2(g|g) = \|f\|^2 - \frac{|(f,g)|^2}{\|g\|^2} = 0.$$

Also muss $f - \mu g = 0$ gelten (Definitheit) und folglich sind f und g linear abhängig.

Aufgabe 75

Wir stellen zunächst fest, dass jede Funktion $\varphi \in \mathscr{S}$ absolut integrierbar ist und somit die Fouriertransformation auf dem Raum $\mathscr{S}$ definiert ist:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|\,dx = \int_{-\infty}^{-1} \underbrace{|\varphi(x)x^2|}_{\leq C_1}\frac{1}{x^2}\,dx + \int_{-1}^{1}\underbrace{|\varphi(x)|}_{\leq C_2}\,dx + \int_{1}^{\infty}\underbrace{|x^2\varphi(x)|}_{\leq C_1}\frac{1}{x^2}\,dx \leq 2(C_1 + C_2).$$

Hierbei haben wir benutzt, dass $|x^n\varphi(x)|$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ beschränkt ist.
Für $\varphi \in \mathscr{S}$ gilt außerdem:

(i) $\varphi' \in \mathscr{S}$: $\varphi' \in C^\infty(\mathbb{R})$ ist klar und $|x^n\frac{d^m}{dx^m}\varphi'(x)| = |x^n\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\varphi(x)|$ ist beschränkt für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$, da $\varphi \in \mathscr{S}$.

(ii) $\psi(x) = x\varphi(x) \in \mathscr{S}$: $\psi \in C^\infty$ ist wieder klar und es gilt

$$\left|x^n\frac{d^m}{dx^m}\psi(x)\right| = \left|x^n\left(m\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\varphi(x) + x\frac{d^m}{dx^m}\varphi(x)\right)\right| < \infty$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$, da $\varphi \in \mathscr{S}$. Ähnlich kann man zeigen, dass auch $x \mapsto x^k\varphi(x) \in \mathscr{S}$ sowie $\frac{d^l}{dx^l}(x^k\varphi(x)) \in \mathscr{S}$ gilt für alle $k, l \in \mathbb{N}_0$.

(iii) $\sup_{x\in\mathbb{R}}|\mathscr{F}\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_1$: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $|\mathscr{F}\varphi(x)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\tau}\varphi(\tau)\,d\tau\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(\tau)|\,d\tau = \|\varphi\|_1$.

Es sei nun $\varphi \in \mathscr{S}$. Wir werden zeigen, dass auch $\mathscr{F}\varphi \in \mathscr{S}$ gilt:

- Differenzierbarkeit: Nach (ii) gilt: $\psi(x) = x\varphi(x) \in \mathscr{S}$ und ist somit absolut integrierbar. Mit Rechenregel 23.7 (b) folgt: $\mathscr{F}\varphi$ ist differenzierbar und es gilt

$$(\mathscr{F}\varphi)'(\xi) = \mathscr{F}\{x \mapsto (-ix)\varphi(x)\}(\xi) = -i\mathscr{F}\psi(\xi)$$

  Die Ableitung ist also die Fouriertransformierte einer Funktion im Schwartz-Raum. Mit dem gleichen Argument ist diese Funktion wieder differenzierbar und induktiv folgt $\mathscr{F}\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sowie

$$\frac{d^m}{dx^m}\mathscr{F}\varphi(x) = \mathscr{F}\{y \mapsto (-iy)^m\varphi(y)\}(x) \qquad \text{(für alle } m \in \mathbb{N}_0).$$

- Beschränktheit von $\left|x^n \frac{d^m}{dx^m}\mathscr{F}\varphi\right|$ für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$: Mit dem eben Gezeigten gilt:

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^n \frac{d^m}{dx^m}\mathscr{F}\varphi(x)\right| &= \sup_{x\in\mathbb{R}}|x^n\mathscr{F}\{y \mapsto (-iy)^m\varphi(y)\}(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}}|(ix)^n\mathscr{F}\{(\cdot)^m\varphi\}(x)| \\ &\overset{23.7(e)}{=} \sup_{x\in\mathbb{R}}\mathscr{F}\left\{y \mapsto \frac{d^n}{dy^n}(y^m\varphi(y))\right\}(x) = \sup_{x\in\mathbb{R}}\mathscr{F}g(x)\end{aligned}$$

  wobei $g(y) = \frac{d^n}{dy^n}(y^m\varphi(y)) \in \mathscr{S}$ nach (ii). Mit (iii) folgt, dass $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\mathscr{F}g(x) \leq \|g\|_1 < \infty$ ist, was die Beschränktheit impliziert.

Es bleibt nun noch die Bijektivität zu zeigen:

- Injektiv: Seien $f, g \in \mathscr{S}$ mit $\mathscr{F}f(\xi) = \mathscr{F}g(\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$. Mit der Umkehrformel 23.10 folgt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\mathscr{F}f(\xi)\,d\xi \overset{\text{Vor.}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\mathscr{F}g(\xi)\,d\xi = g(x).$$

- Surjektiv: Es sei $g \in \mathscr{S}$. Betrachte die Funktion $f(x) = \frac{1}{2\pi}(\mathscr{F}g)(-x) \in \mathscr{S}$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathscr{F}f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\tau}f(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\tau}(\mathscr{F}g)(-\tau)\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\tau}(\mathscr{F}g)(\tau)\,d\tau \overset{23.10}{=} g(x),$$

  d.h. g ist das Bild von f unter $\mathscr{F}$.