Aufgabe 2

Gegeben seien n reelle Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n$ mit $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass für die Determinante der sog. *Vandermonde-Matrix* gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq j < k \leq n} (x_k - x_j)\,.$$

Lösung

Wir verwenden vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

IA: $n = 2$. Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{1 \leq j < k \leq 2} (x_k - x_j)\,.$$

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ beliebig aber fest. Es gelte

$$\det \begin{pmatrix} 1 & y_1 & y_1^2 & \dots & y_1^{n-1} \\ 1 & y_2 & y_2^2 & \dots & y_2^{n-1} \\ 1 & y_3 & y_3^2 & \dots & y_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & y_n & y_n^2 & \dots & y_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq j < k \leq n} (y_k - y_j) \quad \text{für alle } y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R} \text{ (IV)}.$$

Seien nun $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$. Zur Berechnung von

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

multiplizieren wir zuerst die vorletzte Spalte mit x_1 und ziehen diese von der letzten ab. Dann multiplizieren wir die vorvorletzte Spalte mit x_1 und ziehen diese von der vorletzten ab, usw. Die letzte Umformung besteht darin, das x_1-fache der ersten Spalte von der zweiten Spalte abzuziehen. Für $k = n+1, n, \dots, 3, 2$ ziehen wir also nacheinander das x_1-fache der $(k-1)$-ten Spalte von der k-ten Spalte ab. Im Anschluss entwickeln nach der ersten Zeile:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 & \dots & x_2^n - x_1 x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1 x_3 & \dots & x_3^n - x_1 x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1 x_n & \dots & x_n^n - x_1 x_n^{n-1} \\ 1 & x_{n+1} - x_1 & x_{n+1}^2 - x_1 x_{n+1} & \dots & x_{n+1}^n - x_1 x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_2^{n-1}(x_2 - x_1) \\ x_3 - x_1 & x_3(x_3 - x_1) & \dots & x_3^{n-1}(x_3 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \dots & x_n^{n-1}(x_n - x_1) \\ x_{n+1} - x_1 & x_{n+1}(x_{n+1} - x_1) & \dots & x_{n+1}^{n-1}(x_{n+1} - x_1) \end{pmatrix}$$

Nun können wir aus der ersten Zeile dieser Matrix den Faktor $(x_2 - x_1)$ herausziehen, aus der zweiten Zeile $(x_3 - x_1)$ etc. und aus der letzten Zeile den Faktor $(x_{n+1} - x_1)$:

$$= \underbrace{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1)(x_{n+1} - x_1)}_{=\prod_{1<l\leq n+1}(x_l - x_1)} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & \dots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \\ 1 & x_{n+1} & \dots & x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Diese $n \times n$ Matrix ist wiederum eine Vandermonde-Matrix. Gemäß Induktionsvoraussetzung mit $y_m = x_{m+1}$ (für $m = 1, 2, \dots, n$) gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & \dots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \\ 1 & x_{n+1} & \dots & x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1\leq j<k\leq n} (x_{k+1} - x_{j+1}) = \prod_{2\leq i<l\leq n+1} (x_l - x_i).$$

Zusammen ergibt sich

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{pmatrix} = \prod_{1<l\leq n+1} (x_l - x_1) \cdot \prod_{2\leq i<l\leq n+1} (x_l - x_i) = \prod_{1\leq i<l\leq n+1} (x_l - x_i).$$