Aufgabe 2

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x,y) = \begin{cases} xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$

a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

b) Berechnen Sie $\operatorname{grad} f(x,y)$ für alle Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, in denen das möglich ist.

c) Berechnen Sie $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,(0,0)$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\,(0,0)$.

d) Untersuchen Sie, in welchen Punkten f differenzierbar ist. Berechnen Sie dort f'.

e) Ist f zweimal stetig differenzierbar?

Lösung

a) Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist f als Komposition stetiger Funktionen stetig; wir müssen also nur noch die Stetigkeit in $(0,0)$ nachweisen: Wegen

$$\left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right| = \frac{\left|x^2-y^2\right|}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$$

gilt $|f(x,y)| \leq |xy|$ und damit folgt $f(x,y) \to 0 = f(0,0)$ für $(x,y) \to (0,0)$.

b) Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= y\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\,\frac{2x(x^2+y^2)-(x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{y(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}\,, \end{aligned}$$

und wegen $f(x,y) = -f(y,x)$ ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-f(y+h,x)+f(y,x)}{h} \\ &= -\lim_{h\to 0}\frac{f(y+h,x)-f(y,x)}{h} = -f_x(y,x) = -\frac{y^4x+4y^2x^3-x^5}{(y^2+x^2)^2}\,. \end{aligned}$$

Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt also

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} x^4y+4x^2y^3-y^5 \\ x^5-4x^3y^2-xy^4 \end{pmatrix}.$$

Für die partiellen Ableitungen von f im Nullpunkt erhalten wir

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

und

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0\,.$$

Somit ist $\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0)$.

c) Es ist

$$f_{xy}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{h^5-0-0}{(h^2+0)^2} = 1$$

sowie

$$f_{yx}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\,(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f_x(0,h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0+0-h^5}{h(0+h^2)^2} = -1\,.$$

d) Wie wir wissen, gilt

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} x^4y + 4x^2y^3 - y^5 \\ x^5 - 4x^3y^2 - xy^4 \end{pmatrix}$$

auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Dort existieren also die partiellen Ableitungen erster Ordnung und sind stetig, d. h. f ist dort stetig partiell differenzierbar. Aus der Vorlesung wissen wir, dass dies die Differenzierbarkeit von f impliziert. Die Ableitung ist

$$f'(x,y) = \big(\operatorname{grad} f(x,y)\big)^T = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} x^4y + 4x^2y^3 - y^5 & x^5 - 4x^3y^2 - xy^4 \end{pmatrix}.$$

Weiter ist bekannt: $\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0)$. Für $(x,y) \neq (0,0)$ sei $z := \max\{|x|, |y|\}$. Es gilt

$$|f_x(x,y)| = \frac{\left|x^4y + 4x^2y^3 - y^5\right|}{(x^2+y^2)^2} \leq \frac{z^5 + 4z^5 + z^5}{(z^2)^2} = 6z = 6\max\{|x|, |y|\}.$$

Damit folgt $f_x(x,y) \to 0 = f_x(0,0)$ für $(x,y) \to (0,0)$. Genauso sieht man ein, dass f_y in $(0,0)$ stetig ist. Also ist f in $(0,0)$ stetig partiell differenzierbar und damit differenzierbar, und es gilt $f'(0,0) = (0\ 0)$.

e) Die Funktion f kann nicht zweimal stetig differenzierbar sein, denn sonst müssten f_{yx} und f_{xy} nach dem Satz von Schwarz übereinstimmen, was aber nach **c)** nicht der Fall ist.