Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2012
Institut für Analysis 5.07.2012
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. D. Roth

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

12. Saalübung

Aufgabe 3

Die Funktion f ist gegeben durch

$$f(z) = \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{3-z}$$

Bestimmen Sie die Laurentwicklung von f

a) Im Kreisring $1 < |z| < 3$

b) um den Entwicklungspunkt $z_0 = 1$, die im Punkt $1 + 3i$ konvergiert.

Vorüberlegung: Will man

$$\frac{1}{z-a}$$

um den Punkt $z_0 \neq a$ in eine Laurent-Reihe entwickeln, so gibt es dafür zwei Möglichkeiten. Für $|z - z_0| < |a - z_0|$ hat man die Potenzreihen-Entwicklung

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-a} &= \frac{1}{(z-z_0)+(z_0-a)} = \frac{1}{z_0-a}\cdot\frac{1}{\frac{z-z_0}{z_0-a}+1} = \frac{1}{z_0-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{a-z_0}} \\ &= \frac{1}{z_0-a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{a-z_0}\right)^k = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(a-z_0)^{k+1}}\,.\end{aligned} \tag{$*$}$$

Für $|z - z_0| > |a - z_0|$ dagegen ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-a} &= \frac{1}{(z-z_0)+(z_0-a)} = \frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1+\frac{z_0-a}{z-z_0}} = \frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{a-z_0}{z-z_0}} \\ &= \frac{1}{z-z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a-z_0}{z-z_0}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a-z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}}\,.\end{aligned} \tag{$**$}$$

a) Für $1 < |z| < 3$ gilt

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{3-z} = \frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{z^{-2}-1} - \frac{1}{z-3} = -\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1-z^{-2}} - \frac{1}{z-3} \\ &= -\frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(z^{-2}\right)^k - \frac{1}{z-3} = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{2k+2}} - \frac{1}{z-3} \overset{(*)}{=} -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{2(k+1)}} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{3^{k+1}}\,.\end{aligned}$$

b) Die Partialbruchzerlegung des ersten Summanden von $f(z)$ liefert die Darstellung

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z-1}\right) - \frac{1}{z-3}\,.$$

Die Funktion f hat Polstellen in -1, in 1 und in 3. Da die beiden Punkte -1 und 3 von $z_0 = 1$ den Abstand 2 haben, kommen als Gebiete für die Laurent-Entwicklung um $z_0 = 1$ nur die beiden Kreisringe

$$0 < |z-1| < 2 \qquad \text{und} \qquad 2 < |z-1| < \infty$$

in Frage. Da der Punkt $1+3i$ im Konvergenzgebiet liegen soll und von z_0 den Abstand $|1+3i-1| = 3$ hat, ist der zweite Kreisring der richtige. Dort gilt gemäß ($**$)

$$\frac{1}{z+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1-1)^k}{(z-1)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{(z-1)^{k+1}}, \quad \frac{1}{z-3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3-1)^k}{(z-1)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(z-1)^{k+1}}.$$

Also ergibt sich für $|z-1| > 2$

$$f(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{(z-1)^{k+1}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(z-1)^{k+1}} = -\frac{1}{z-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(-2)^k - 2^k}{(z-1)^{k+1}}.$$