Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

SS 2013
15.04.2013

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

1. Übungsblatt

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z) = \big(xy^2z^3e^{xy^2z^3},\, x^2e^y + \sin x\big)$

b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y) = \big(ye^x + x\sinh y,\, y^4 + 3x^2\sin y,\, 4y - x^3\big)$

c) $f\colon \mathbb{R} \times (0,\infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(w,x,y,z) = x^y$

Aufgabe 2

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{y^3 - x^2y}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

b) Berechnen Sie in jedem Punkt die partiellen Ableitungen von f.

c) Sind die partiellen Ableitungen von f im Punkt $(0,0)$ stetig?

d) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ für jede Richtung v, für die das möglich ist. Für welche v gilt $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = (\nabla f(0,0)) \cdot v$?

e) Untersuchen Sie, in welchen Punkten f differenzierbar ist. Berechnen Sie dort Df.

Aufgabe 3

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\, \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass diese Funktion im Punkt $(0,0)$ differenzierbar ist.

b) Rechnen Sie nach, dass die partiellen Ableitungen $\partial_1 f$ und $\partial_2 f$ in $(0,0)$ nicht stetig sind.

Aufgabe 4 *(Wärmeleitungsgleichung und ebene Wellengleichung)*

a) Für $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ sei $\phi(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}$. Zeigen Sie, dass ϕ die *Wärmeleitungsgleichung* $\partial_t \phi = \Delta \phi$ erfüllt.

b) Zeigen Sie, dass für $f, g \in C^2(\mathbb{R})$, $c > 0$ und $k \in \mathbb{R}^n$ mit $c^2 = \|k\|^2$ die Funktion $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(x,t) = f(\langle k, x\rangle - ct) + g(\langle k, x\rangle + ct)$ eine Lösung der *Wellengleichung* $\partial_t^2 u = \Delta u$ ist.

Anmerkung: Hierbei bezieht sich der Laplace-Operator nur auf die Raumkoordinaten, d.h. $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ falls $x \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 5 *(Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^3$)*

Gegeben sei die Abbildung

$$f : (0,\infty) \times (0,\pi) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^3,\ f(r,\theta,\varphi) = r(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta).$$

a) Bestimmen Sie die Jacobimatrix der Abbildung f.

b) Berechnen Sie die Skalarprodukte $g_{ij} = \langle \partial_i f, \partial_j f\rangle$ für $1 \le i,j \le 3$.