Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

SS 2013
15.04.2013

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

1. Übungsblatt

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z) = \big(xy^2z^3e^{xy^2z^3},\, x^2e^y + \sin x\big)$

b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y) = \big(ye^x + x\sinh y,\, y^4 + 3x^2\sin y,\, 4y - x^3\big)$

c) $f\colon \mathbb{R} \times (0,\infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(w,x,y,z) = x^y$

Lösung:

a) Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z) = \big(xy^2z^3e^{xy^2z^3},\, x^2e^y + \sin x\big) =: (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z))$.
Wir berechnen zunächst die partiellen Ableitungen von f:

$$\begin{aligned}
\partial_1 f_1(x,y,z) &= y^2z^3e^{xy^2z^3} + xy^2z^3e^{xy^2z^3}y^2z^3 = y^2z^3(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3},\\
\partial_2 f_1(x,y,z) &= 2xyz^3(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3},\\
\partial_3 f_1(x,y,z) &= 3xy^2z^2(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3},\\
\partial_1 f_2(x,y,z) &= 2xe^y + \cos x,\\
\partial_2 f_2(x,y,z) &= x^2e^y,\\
\partial_3 f_2(x,y,z) &= 0
\end{aligned}$$

Da die partiellen Ableitungen auf $\mathbb{R}^3$ stetig sind, ist f stetig partiell differenzierbar und damit auch differenzierbar. Für die Ableitung von f ergibt sich

$$\begin{aligned}
Df(x,y,z) &= \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x,y,z) & \partial_2 f_1(x,y,z) & \partial_3 f_1(x,y,z) \\ \partial_1 f_2(x,y,z) & \partial_2 f_2(x,y,z) & \partial_3 f_2(x,y,z) \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} y^2z^3(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3} & 2xyz^3(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3} & 3xy^2z^2(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3} \\ 2xe^y + \cos x & x^2e^y & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y) = \big(ye^x + x\sinh y,\, y^4 + 3x^2\sin y,\, 4y - x^3\big)$
Auch hier sind alle partiellen Ableitungen von f stetig, so dass f differenzierbar ist mit

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} ye^x + \sinh y & e^x + x\cosh y \\ 6x\sin y & 4y^3 + 3x^2\cos y \\ -3x^2 & 4 \end{pmatrix}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

c) $f\colon \mathbb{R}\times(0,\infty)\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(w,x,y,z) = x^y$

Wegen $x^y = e^{y\ln x}$ gilt $\partial_x f(w,x,y,z) = e^{y\ln x}y/x$ und $\partial_y f(w,x,y,z) = e^{y\ln x}\ln x$. Folglich ist

$$Df(w,x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & yx^{y-1} & x^y\ln x & 0\end{pmatrix}, \quad (w,x,y,z)\in\mathbb{R}\times(0,\infty)\times\mathbb{R}^2.$$

Aufgabe 2

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{y^3-x^2y}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y)\neq(0,0)\,,\\ 0 & \text{für } (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

b) Berechnen Sie in jedem Punkt die partiellen Ableitungen von f.

c) Sind die partiellen Ableitungen von f im Punkt $(0,0)$ stetig?

d) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ für jede Richtung v, für die das möglich ist. Für welche v gilt $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = (\nabla f(0,0))\cdot v$?

e) Untersuchen Sie, in welchen Punkten f differenzierbar ist. Berechnen Sie dort Df.

Lösung:

a) Auf $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ ist f als Komposition stetiger Funktionen stetig. Stetigkeit von f in $(0,0)$: Sei $(x_k,y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ mit $(x_k,y_k)\to(0,0)$. Dann gilt auch $m_k := \max\{|x_k|,|y_k|\} \xrightarrow{k\to\infty} 0$, und dies liefert dann

$$|f(x_k,y_k)| \le \frac{|y_k^3|+|x_k^2y_k|}{x_k^2+y_k^2} \le \frac{m_k^3+m_k^3}{m_k^2} = 2m_k \xrightarrow{k\to\infty} 0\,.$$

Das bedeutet $f(x_k,y_k)\to 0 = f(0,0)$, womit die Stetigkeit von f auf ganz $\mathbb{R}^2$ bewiesen ist.

b) Für $(x,y)\neq(0,0)$ erhalten wir mit Hilfe der Quotientenregel

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{-2xy(x^2+y^2)-(y^3-x^2y)2x}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

und

$$\partial_2 f(x,y) = \frac{(3y^2-x^2)(x^2+y^2)-(y^3-x^2y)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4x^2y^2-x^4+y^4}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

Im Punkt $(0,0)$ dagegen müssen wir auf die Definition der partiellen Ableitung zurückgehen:

$$\partial_1 f(0,0) = \lim_{t\to0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to0}\frac{0-0}{t} = 0$$

und

$$\partial_2 f(0,0) = \lim_{t\to0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to0}\frac{1}{t}\cdot\frac{t^3-0}{0+t^2} = \lim_{t\to0}1 = 1\,.$$

c) Wegen

$$\partial_1 f(\tfrac{1}{k},\tfrac{1}{k}) = -\frac{4k^{-4}}{(k^{-2}+k^{-2})^2} = -1 \xrightarrow{k\to\infty} -1 \neq 0 = \partial_1 f(0,0)$$

und

$$\partial_2 f(\tfrac{1}{k},0) = \frac{0-k^{-4}+0}{(k^{-2}+0)^2} = -1 \xrightarrow{k\to\infty} -1 \neq 1 = \partial_2 f(0,0)$$

sind die partiellen Ableitungen von f in $(0,0)$ nicht stetig.

d) Es sei $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ eine beliebige Richtung. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f((0,0)+hv)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(hv_1,hv_2)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{(hv_2)^3-(hv_1)^2hv_2}{(hv_1)^2+(hv_2)^2} = \lim_{h\to 0}\frac{h^3v_2^3-h^3v_1^2v_2}{h^3(v_1^2+v_2^2)} = \lim_{h\to 0}\frac{v_2^3-v_1^2v_2}{v_1^2+v_2^2} = \frac{v_2^3-v_1^2v_2}{v_1^2+v_2^2}\,.\end{aligned}$$

Dies soll nun mit

$$(\nabla f(0,0))\cdot v = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} = v_2$$

verglichen werden. Es gilt

$$\frac{v_2^3-v_1^2v_2}{v_1^2+v_2^2} = v_2 \iff v_2^3-v_1^2v_2 = v_2(v_1^2+v_2^2) \iff 2v_1^2v_2 = 0\,.$$

Gleichheit gilt also genau dann, wenn $v_1 = 0$ oder $v_2 = 0$ ist.

e) Nicht für alle Richtungen v gilt die Gleichung $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = (\nabla f(0,0))\cdot v$. Folglich kann die Funktion f in $(0,0)$ nicht differenzierbar sein, denn sonst müsste diese Gleichung für alle Richtungen v gelten.

Da die partiellen Ableitungen von f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig sind, ist f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig partiell differenzierbar, also auch differenzierbar und für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$Df(x,y) = \big(\nabla f(x,y)\big)^T = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix}-4xy^3 & -x^4+4x^2y^2+y^4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1,2}.$$

Aufgabe 3

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases}(x^2+y^2)\,\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x,y)\neq(0,0)\,,\\ 0 & \text{für } (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass diese Funktion im Punkt $(0,0)$ differenzierbar ist.

b) Rechnen Sie nach, dass die partiellen Ableitungen $\partial_1 f$ und $\partial_2 f$ in $(0,0)$ nicht stetig sind.

Lösung:

a) Für die partiellen Ableitungen von f im Punkt $(0,0)$ gilt

$$\partial_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2\sin(|t|^{-1})-0}{t} = \lim_{t\to 0} t\sin(|t|^{-1}) = 0,$$

weil $\sin(|t|^{-1})$ beschränkt ist, und aufgrund von $f(x,y)=f(y,x)$ ist $\partial_2 f(0,0)=\partial_1 f(0,0)=0$. Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ist genau dann differenzierbar in $(0,0)$, wenn es eine lineare Abbildung $A\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^1$, also $A\in\mathbb{R}^{1,2}$, gibt mit

$$\frac{|f(h_1,h_2)-f(0,0)-A\binom{h_1}{h_2}|}{\|\binom{h_1}{h_2}\|} \xrightarrow{\binom{h_1}{h_2}\to\binom{0}{0}} 0\,. \tag{$*$}$$

Wegen $\partial_1 f(0,0)=0$ und $\partial_2 f(0,0)=0$ ist $A=(0\ \ 0)$ unser Kandidat für die Ableitung von f in $(0,0)$. In der Tat ist $(*)$ für dieses A erfüllt, denn es gilt $f(0,0)=0$ und $A\binom{h_1}{h_2}=0$ sowie

$$\frac{|f(h_1,h_2)|}{\|\binom{h_1}{h_2}\|} = \sqrt{h_1^2+h_2^2}\,\sin\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \|\tbinom{h_1}{h_2}\|\sin\frac{1}{\|\binom{h_1}{h_2}\|} \xrightarrow{\binom{h_1}{h_2}\to\binom{0}{0}} 0\,.$$

b) Für die partielle Ableitung von f nach x ergibt sich im Fall $(x,y)\neq(0,0)$

$$\begin{aligned}\partial_1 f(x,y) &= 2x\sin\Big((x^2+y^2)^{-1/2}\Big) + (x^2+y^2)\cos\Big((x^2+y^2)^{-1/2}\Big)\cdot(-\tfrac{1}{2})(x^2+y^2)^{-3/2}\cdot 2x\\ &= 2x\sin\Big((x^2+y^2)^{-1/2}\Big) - x(x^2+y^2)^{-1/2}\cos\Big((x^2+y^2)^{-1/2}\Big)\,.\end{aligned}$$

Damit hat man für $x\neq 0$

$$\partial_1 f(x,0) = 2x\sin(|x|^{-1}) - x|x|^{-1}\cos(|x|^{-1})\,.$$

Ist $x_k := \frac{1}{k\pi}$, $k\in\mathbb{N}$, gesetzt, so strebt $x_k\to 0$ für $k\to\infty$, allerdings konvergiert $\partial_1 f(x_k,0) = 2\frac{1}{k\pi}\sin(k\pi)-\cos(k\pi) = -(-1)^k$ für $k\to\infty$ nicht. Folglich ist $\partial_1 f$ in $(0,0)$ nicht stetig. Aus Symmetriegründen ($f(x,y)=f(y,x)$ für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$) gilt dies auch für $\partial_2 f$.

Bemerkung: Die Funktion f ist ein Beispiel für eine Funktion, die differenzierbar ist, jedoch nicht stetig partiell differenzierbar ist. Wenn man also weiß, dass eine Funktion nicht stetig partiell differenzierbar ist, dann kann man keine Aussage über Differenzierbarkeit treffen.

Aufgabe 4 *(Wärmeleitungsgleichung und ebene Wellengleichung)*

a) Für $(x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ sei $\phi(x,t)=(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}$. Zeigen Sie, dass ϕ die *Wärmeleitungsgleichung* $\partial_t\phi=\Delta\phi$ erfüllt.

b) Zeigen Sie, dass für $f, g \in C^2(\mathbb{R})$, $c > 0$ und $k \in \mathbb{R}^n$ mit $c^2 = \|k\|^2$ die Funktion $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(x,t) = f(\langle k, x\rangle - ct) + g(\langle k, x\rangle + ct)$ eine Lösung der *Wellengleichung* $\partial_t^2 u = \Delta u$ ist.

Anmerkung: Hierbei bezieht sich der Laplace-Operator nur auf die Raumkoordinaten, d.h. $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ falls $x \in \mathbb{R}^n$.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
\partial_t \phi &= (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot \left(-\frac{n}{2}\right) t^{-\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} + (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \cdot \frac{\|x\|^2}{4} t^{-2} \\
&= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \left(-\frac{n}{2t} + \frac{\|x\|^2}{4t^2}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_i \phi &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \left(-\frac{x_i}{2t}\right) \\
\partial_{ii}^2 \phi &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \left(-\frac{x_i}{2t}\right)^2 + (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \left(-\frac{1}{2t}\right) \\
&= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \left(-\frac{1}{2t} + \frac{x_i^2}{4t^2}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \Delta\phi = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \left(-\frac{n}{2t} + \frac{\|x\|^2}{4t^2}\right) \\
&\Rightarrow \quad \partial_t \phi = \Delta \phi.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\partial_t u &= f'(\langle k, x\rangle - ct) \cdot (-c) + g'(\langle k, x\rangle + ct) \cdot c \\
\partial_t^2 u &= f''(\langle k, x\rangle - ct) c^2 + g''(\langle k, x\rangle + ct) c^2 \\
\partial_i u &= f'(\langle k, x\rangle - ct) \cdot k_i + g'(\langle k, x\rangle + ct) \cdot k_i \\
\partial_{ii}^2 u &= f''(\langle k, x\rangle - ct) \cdot k_i^2 + g''(\langle k, x\rangle + ct) \cdot k_i^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \Delta u = f''(\langle k, x\rangle - ct) \underbrace{\|k\|^2}_{=c^2} + g''(\langle k, x\rangle + ct) \underbrace{\|k\|^2}_{=c^2} \\
&\Rightarrow \quad \partial_t^2 u = \Delta u.
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 *(Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^3$)*

Gegeben sei die Abbildung

$$f : (0,\infty) \times (0,\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3,\ f(r,\theta,\varphi) = r(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta).$$

a) Bestimmen Sie die Jacobimatrix der Abbildung f.

b) Berechnen Sie die Skalarprodukte $g_{ij} = \langle \partial_i f, \partial_j f\rangle$ für $1 \le i, j \le 3$.

Lösung:

a) Jacobimatrix:

$$\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{aligned}
g_{11} &= \sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta \\
&= \sin^2\theta(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) + \cos^2\theta \\
&= 1 \\
g_{12} = g_{21} &= r\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi + r\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi - r\sin\theta\cos\theta \\
&= r(\sin\theta\cos\theta(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) - r\sin\theta\cos\theta \\
&= 0 \\
g_{13} = g_{31} &= -r\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi + r\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi + 0 = 0 \\
g_{22} &= r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta \\
&= r^2\cos^2\theta(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) + r^2\sin^2\theta = r^2 \\
g_{23} = g_{32} &= -r^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi + r^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi + 0 = 0 \\
g_{33} &= r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + 0 \\
&= r^2\sin^2\theta(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = r^2\sin^2\theta.
\end{aligned}$$