Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

SS 2013
22.04.2013

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

2. Übungsblatt

Aufgabe 1 *(Eulersche Identität)*

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) $f(tx) = t^\alpha f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, t > 0$ (f ist homogen vom Grad α)

(2) $Df(x)x = \alpha f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

Hinweis: Betrachten Sie für (2) $\Rightarrow$ (1) die Funktion $g(t) = t^{-\alpha} f(tx)$.

Aufgabe 2 *(Ableitung der Determinante)*

a) Begründen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, $f(A) = \det(A)$, differenzierbar ist und zeigen Sie für die Ableitung

$$Df(\mathbb{E}_n)H = tr(H) \text{ für alle } H \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

b) Zeigen Sie, dass die Ableitung der Funktion f aus Teil a) an einer beliebigen Stelle A mit $\det(A) \neq 0$ wie folgt gegeben ist:

$$Df(A)H = \det(A) tr(A^{-1}H) \text{ für alle } H \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Hinweis: Indem man die Spalten einer Matrix untereinander schreibt, kann man $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\mathbb{R}^{n^2}$ identifizieren. Es gilt $\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \text{sign}(\sigma)$ und es ist $tr(B) := \sum_{i=1}^n b_{ii}$ für $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Für Teil b) beachte man $\det(A + tH) = \det(A)\det(A^{-1}(A + tH))$ und verwende a).

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}, \\ f(x,y) &= \frac{1}{2}(\cos x \sin y - \sin x \cos y + \sin x - \sin y). \end{aligned}$$

Bestimmen und klassifizieren Sie alle lokalen Extrema von f.

Hinweis: Die Abbildung f ist in beide Koordinatenrichtungen 2π-periodisch. Es ist daher ausreichend, alle lokalen Extrema auf $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ zu bestimmen.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie jeweils alle Stellen lokaler Extrema der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, und entscheiden Sie, ob es sich dabei um Maxima oder Minima handelt.

a) $f(x, y) = xy + x - 2y - 2$

b) $f(x, y) = 2x^3 - 3xy + 2y^3 - 3$

c) $f(x, y) = (2x + 2y + 3)e^{-x^2-y^2}$

Aufgabe 5

Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = 12x^4 - 7x^2y + y^2$.

a) Berechnen Sie alle kritischen Punkte von f.

b) Überprüfen Sie mit Hilfe der Hessematrix von f, ob die kritischen Punkte auch Extremstellen von f sind.

c) Zeigen Sie, dass f längs jeder Geraden durch Null ein Minimum im Nullpunkt besitzt.

d) Besitzt f auch längs jeder Parabel $y = ax^2$ mit $a \in \mathbb{R}$ ein Minimum im Ursprung?

Aufgabe 6

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$. Bestimmen Sie das Taylorpolynom erster Ordnung im Punkt $(1, 1)$ und das zugehörige Restglied.