Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

SS 2013
22.04.2013

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

2. Übungsblatt

Aufgabe 1 *(Eulersche Identität)*

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) $f(tx) = t^\alpha f(x) \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, t > 0$ (f ist homogen vom Grad α)

(2) $Df(x)x = \alpha f(x) \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

Hinweis: Betrachten Sie für (2) $\Rightarrow$ (1) die Funktion $g(t) = t^{-\alpha} f(tx)$.

Lösung:

(1) $\Rightarrow$ (2) Es gelte $f(tx) = t^\alpha f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $t > 0$. Dann gilt für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} Df(x)x &= \lim_{t \searrow 0} \frac{f(x+tx) - f(x)}{t} \\ &= \lim_{t \searrow 0} \frac{(1+t)^\alpha f(x) - f(x)}{t} \\ &= f(x) \cdot \lim_{t \searrow 0} \frac{(1+t)^\alpha - 1^\alpha}{t} \\ &= f(x) \frac{d}{ds}(s^\alpha)_{|s=1} \\ &= \alpha f(x). \end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Für $t > 0$ und festes $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sei $g(t) := t^{-\alpha} f(tx)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} g'(t) &= -\alpha t^{-\alpha-1} f(tx) + t^{-\alpha} Df(tx)x \\ &= -\alpha t^{-\alpha-1} f(tx) + t^{-\alpha-1} Df(tx)(tx) \\ &\overset{Vor.\,in\,(2)}{=} -\alpha t^{-\alpha-1} f(tx) + t^{-\alpha-1} \alpha f(tx) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$\Rightarrow g \equiv \text{const.}$

Aus $g(1) = f(x)$ folgt $g \equiv f(x)$, also $t^{-\alpha} f(tx) = f(x)$ und somit $f(tx) = t^\alpha f(x)$.

Aufgabe 2 *(Ableitung der Determinante)*

a) Begründen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$, $f(A) = \det(A)$, differenzierbar ist und zeigen Sie für die Ableitung

$$Df(\mathbb{E}_n)H = tr(H) \text{ für alle } H \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

b) Zeigen Sie, dass die Ableitung der Funktion f aus Teil a) an einer beliebigen Stelle A mit $\det(A) \neq 0$ wie folgt gegeben ist:

$$Df(A)H = \det(A)tr(A^{-1}H) \text{ für alle } H \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Hinweis: Indem man die Spalten einer Matrix untereinander schreibt, kann man $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\mathbb{R}^{n^2}$ identifizieren. Es gilt $\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}\operatorname{sign}(\sigma)$ und es ist $tr(B) := \sum_{i=1}^n b_{ii}$ für $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Für Teil b) beachte man $\det(A + tH) = \det(A)\det(A^{-1}(A + tH))$ und verwende a).

Lösung:

a) Sei $X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$.

Dann ist die Ableitung $\partial_{x_{ij}}$ (nach der Variablen x_{ij}) von det gegeben durch

$$\begin{aligned} (\partial_{x_{ij}} \det)(X) &= \partial_{x_{ij}} \left(\sum_{\sigma\in S_n} x_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot x_{n\sigma(n)} \operatorname{sign}(\sigma) \right) \\ &= \partial_{x_{ij}} \left(\sum_{\substack{\sigma\in S_n \\ \sigma(i)=j}} x_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot x_{n\sigma(n)} \operatorname{sign}(\sigma) \right) \\ &= \sum_{\substack{\sigma\in S_n \\ \sigma(i)=j}} x_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot \hat{x}_{i\sigma(i)} \cdot \ldots \cdot x_{n\sigma(n)} \operatorname{sign}(\sigma), \end{aligned}$$

wobei $\hat{x}_{i\sigma(i)}$ im Produkt ausgelassen wird.

Insbesondere existieren alle partielle Ableitungen und sind stetig. Es folgt, dass $f = \det$ differenzierbar ist.

Mit dem Skalarprodukt $\langle A, B\rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}b_{ij}$ für $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ gilt nach Vorlesung

$$Df(\mathbb{E}_n)H = \langle \operatorname{grad} f(\mathbb{E}_n), H\rangle$$

mit

$$\operatorname{grad} f(X) := \begin{pmatrix} \partial_{x_{11}} f(X) & \cdots & \partial_{x_{1n}} f(X) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_{n1}} f(X) & \cdots & \partial_{x_{nn}} f(X) \end{pmatrix}$$

(alternativ: Spalten untereinander schreiben und Standardgradienten und -skalarprodukt verwenden).

Wegen $(\partial_{x_{ij}} \det)(\mathbb{E}_n) = \sum\limits_{\substack{\sigma=\mathrm{Id} \\ \sigma(i)=j}} x_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot \hat{x}_{i\sigma(i)} \cdot \ldots \cdot x_{n\sigma(n)} \operatorname{sign}(\sigma) = \delta_{ij}$ (wobei hier $(x_{ij})_{1\le i,j\le n} = \mathbb{E}_n$) folgt

$$Df(\mathbb{E}_n)H = \langle \operatorname{grad} f(\mathbb{E}_n), H\rangle = \langle \mathbb{E}_n, H\rangle = tr(H).$$

b)

$$\begin{aligned}
Df(A)H &= \lim_{t\to 0} \frac{\det(A+tH) - \det(A)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\det(A)\det(A^{-1}(A+tH)) - \det(A)}{t} \\
&= \det(A) \lim_{t\to 0} \frac{\det(\mathbb{E}_n + tA^{-1}H) - \det(\mathbb{E}_n)}{t} \\
&= \det(A) Df(\mathbb{E}_n)A^{-1}H) \\
&\overset{a)}{=} \det(A) tr(A^{-1}H).
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion

$$\begin{aligned}
f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}, \\
f(x,y) &= \frac{1}{2}(\cos x \sin y - \sin x \cos y + \sin x - \sin y).
\end{aligned}$$

Bestimmen und klassifizieren Sie alle lokalen Extrema von f.

Hinweis: Die Abbildung f ist in beide Koordinatenrichtungen 2π-periodisch. Es ist daher ausreichend, alle lokalen Extrema auf $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ zu bestimmen.

Lösung:
Die kritischen Stellen ergeben sich aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}
2\partial_1 f(x,y) &= -\sin x \sin y - \cos x \cos y + \cos x = 0 \\
2\partial_2 f(x,y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y - \cos y = 0,
\end{aligned}$$

d.h. aus

$$\begin{aligned}
\cos x - \cos(x-y) &= 0 \\
-\cos y + \cos(x-y) &= 0.
\end{aligned}$$

Man erhält auf $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ drei kritische Stellen:

$$(0,0), \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right), \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right).$$

Die Hesse-Matrix von $2f$ ist

$$\begin{pmatrix} \sin(x-y) - \sin x & -\sin(x-y) \\ -\sin(x-y) & \sin(x-y) + \sin y \end{pmatrix}$$

Für die kritischen Stellen $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$ bzw. $\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ ergeben sich die Hesse-Matrizen

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix},$$

d.h. f hat dort ein lokales Maximum bzw. ein lokales Minimum (eine kurze Rechnung zeigt: alle Eigenwerte der ersten Matrix sind negativ, also ist sie negativ definit; umgekehrt für die zweite Matrix).

Es bleibt der Punkt $(0,0)$ zu untersuchen. Die Hessematrix ist die Nullmatrix, so dass hieraus keine Rückschlüsse über die Existenz eines lokalen Extremums möglich sind. Wir argumentieren daher wie folgt:

In jeder offenen Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ von 0 gibt es ein $\xi \in U$ mit $f(\xi) \neq 0$ (denn ansonsten wäre $f \equiv 0$ auf U und jeder Punkt auf U wäre kritisch). Da die Funktion ungerade ist, ist $f(-\xi) = -f(\xi)$. Damit gilt $f(0) = 0$ und f nimmt in jeder offenen Umgebung von 0 sowohl positive, als auch negative Werte an. Damit ist 0 keine Extremalstelle.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie jeweils alle Stellen lokaler Extrema der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, und entscheiden Sie, ob es sich dabei um Maxima oder Minima handelt.

a) $f(x,y) = xy + x - 2y - 2$

b) $f(x,y) = 2x^3 - 3xy + 2y^3 - 3$

c) $f(x,y) = (2x + 2y + 3)e^{-x^2-y^2}$

Lösung:

a) Es gilt $\operatorname{grad} f(x,y) = (y+1, x-2)^t \overset{!}{=} (0,0)^t$ genau dann, wenn $(x,y) = (2,-1)$ ist. Somit ist $(2,-1)$ der einzige kritische Punkt von f. Die Hessematrix $H_f(2,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte 1 und -1, ist also indefinit. Damit besitzt f in $(2,-1)$ einen Sattelpunkt.

b) Der Gradient von f lautet $\operatorname{grad} f(x,y) = (6x^2 - 3y, -3x + 6y^2)^t$. Die erste Komponente ist $= 0$ genau dann, wenn $y = 2x^2$ ist. In diesem Fall ergibt sich für die zweite Komponente $-3x + 24x^4 = 3x(8x^3 - 1)$. Die kritischen Punkte sind also $(0,0)$ und $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Die Hessematrix von f ist gegeben durch $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x & -3 \\ -3 & 12y \end{pmatrix}$.

Da $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ die Eigenwerte -3 und 3 besitzt, ist $H_f(0,0)$ indefinit. Deshalb ist $(0,0)$ ein Sattelpunkt.

Da $H_f(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ die Eigenwerte 3 und 9 besitzt, ist $H_f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ positiv definit. Somit hat f in $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ ein lokales Minimum.

c) Wir bestimmen zunächst die kritischen Punkte von f. Es gilt

$$\partial_1 f(x,y) = 2e^{-x^2-y^2} + (2x+2y+3)e^{-x^2-y^2}(-2x) = (-4x^2-4xy-6x+2)e^{-x^2-y^2}\,.$$

Wegen $f(x,y) = f(y,x)$ ergibt sich daraus

$$\partial_2 f(x,y) = \partial_1 f(y,x) = (-4y^2-4xy-6y+2)e^{-x^2-y^2}.$$

Kritische Punkte von f sind solche mit $\operatorname{grad} f(x,y) = 0$, also mit

$$-4x^2-4xy-6x+2 = 0 \qquad \text{und} \qquad -4y^2-4xy-6y+2 = 0\,. \tag{$*$}$$

Wir ziehen die erste von der zweiten Gleichung ab und erhalten

$$4(x^2-y^2)+6(x-y) = 0\,, \qquad \text{also} \qquad (x-y)\big(4(x+y)+6\big) = 0\,.$$

Dies ist gleichbedeutend mit $x-y=0$ oder $4(x+y)+6=0$. Im ersten Fall, also für $x=y$, folgt aus $(*)$ die Gleichung

$$-8x^2-6x+2 = 0\,, \qquad \text{also} \qquad x^2+\tfrac{3}{4}x-\tfrac{1}{4} = 0\,.$$

Diese hat die zwei Lösungen $x_{1,2} = -\frac{3}{8} \pm (\frac{9}{64}+\frac{1}{4})^{1/2}$, d. h. $x_1 = \frac{1}{4}$ und $x_2 = -1$.
Im zweiten Fall (für $y = -x-\frac{3}{2}$) wird die erste Gleichung in $(*)$ zu

$$-4x^2-4x(-x-\tfrac{3}{2})-6x+2 = 0\,, \qquad \text{also} \qquad 2 = 0\,.$$

Es gibt folglich genau zwei kritische Punkte: $(-1,-1)$ und $(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$.
Nur dort können lokale Extrema von f sein, doch ob tatsächlich Extrema vorliegen, müssen wir noch untersuchen. Dazu betrachten wir die Hessematrix von f. Es gilt

$$\begin{aligned}
\partial_1^2 f(x,y) &= (-8x-4y-6)e^{-x^2-y^2} - 2x(-4x^2-4xy-6x+2)e^{-x^2-y^2} \\
&= (8x^3+8x^2y+12x^2-12x-4y-6)e^{-x^2-y^2}\,, \\
\partial_2^2 f(x,y) &= (8y^3+8xy^2+12y^2-4x-12y-6)e^{-x^2-y^2}\,, \\
\partial_{12}^2 f(x,y) &= -4xe^{-x^2-y^2} - 2y(-4x^2-4xy-6x+2)e^{-x^2-y^2} \\
&= (8x^2y+8xy^2+12xy-4x-4y)e^{-x^2-y^2}\,.
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$H_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} \partial_1^2 f(-1,-1) & \partial_{12}^2 f(-1,-1) \\ \partial_{12}^2 f(-1,-1) & \partial_2^2 f(-1,-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6e^{-2} & 4e^{-2} \\ 4e^{-2} & 6e^{-2} \end{pmatrix} = 2e^{-2}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix besitzt nur positive Eigenwerte, ist also positiv definit. Somit besitzt f im Punkt $(-1,-1)$ ein lokales Minimum. Weiter ist

$$H_f(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4}) = \begin{pmatrix} -9e^{-1/8} & -e^{-1/8} \\ -e^{-1/8} & -9e^{-1/8} \end{pmatrix} = -e^{-1/8}\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix besitzt nur negative Eigenwerte, ist also negativ definit. Im Punkt $(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ hat f daher ein lokales Maximum.

Aufgabe 5

Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = 12x^4 - 7x^2y + y^2$.

a) Berechnen Sie alle kritischen Punkte von f.

b) Überprüfen Sie mit Hilfe der Hessematrix von f, ob die kritischen Punkte auch Extremstellen von f sind.

c) Zeigen Sie, dass f längs jeder Geraden durch Null ein Minimum im Nullpunkt besitzt.

d) Besitzt f auch längs jeder Parabel $y = ax^2$ mit $a \in \mathbb{R}$ ein Minimum im Ursprung?

Lösung:

a) Für einen kritischen Punkt muss gelten $\operatorname{grad} f(x,y) = (2x(24x^2 - 7y), -7x^2 + 2y)^t \overset{!}{=} (0,0)^t$. Aus der ersten Gleichung folgt $x = 0$ oder $24x^2 - 7y = 0$. Der Fall $x = 0$ führt zu $y = 0$, und wir erhalten den kritischen Punkt $(x_0, y_0) = (0,0)$. Aus $24x^2 - 7y = 0$ folgt $2y = \frac{48}{7}x^2$ und dies in die zweite Gleichung eingesetzt ergibt $-7x^2 + \frac{48}{7}x^2 = 0$, also wieder $x = 0$. Einziger kritischer Punkt ist somit $(0,0)$.

b) Es gilt $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 144x^2 - 14y & -14x \\ -14x & 2 \end{pmatrix}$ und folglich $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Die Matrix $H_f(0,0)$ hat die Eigenwerte 0 und 2, ist also positiv semidefinit. Somit können wir hier allein mit der Hessematrix keine Aussage treffen, ob in $(0,0)$ ein lokales Extremum vorliegt; dies werden wir in Teil d) dieser Aufgabe können.

c) Auf der Geraden $x = 0$ wird die Funktion beschrieben durch

$$g(y) := f(0,y) = y^2 \ .$$

Für $y = 0$ besitzt g ein striktes lokales Minimum. Auf der Gerade $y = 0$ wird die Funktion beschrieben durch

$$\tilde{g}(x) := f(x,0) = 12x^4.$$

Für $x = 0$ besitzt auch $\tilde{g}$ ein striktes lokales Minimum.

Alle anderen Ursprungsgeraden können durch $y = ax$ mit $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ dargestellt werden, und die Funktion wird dann durch

$$h(x) := f(x, ax) = 12x^4 - 7ax^3 + a^2x^2$$

beschrieben. Wir erhalten

$$h'(x) = 48x^3 - 21ax^2 + 2a^2x, \quad \text{also } h'(0) = 0$$

sowie

$$h''(x) = 144x^2 - 42ax + 2a^2, \quad \text{d.h. } h''(0) = 2a^2 > 0 \ .$$

Somit besitzt h in $x = 0$ ein striktes lokales Minimum.

d) Auf der Parabel $y = ax^2$ hat die Funktion die Gestalt

$$p(x) := f(x, ax^2) = 12x^4 - 7ax^4 + a^2x^4 = x^4(a^2 - 7a + 12) = x^4(a-3)(a-4)\ .$$

Damit ist $p(x) = bx^4$, wobei $b := (a-3)(a-4)$.

Für $a \in (3,4)$ ist $b < 0$ und in $x = 0$ liegt ein striktes Maximum vor. Für $a \notin [3,4]$ ist $b > 0$ und in $x = 0$ liegt ein striktes Minimum vor. Für $a \in \{3,4\}$ ist $b = 0$, also $p(x) \equiv 0$ und in $x = 0$ liegt lokales (nicht-striktes) Minimum und Maximum vor.

Bei dem kritischen Punkt $(0,0)$ handelt es sich also um einen Sattelpunkt.

Aufgabe 6

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$. Bestimmen Sie das Taylorpolynom erster Ordnung im Punkt $(1,1)$ und das zugehörige Restglied.

Lösung:
Es ist $f(1,1) = 0$, und die partiellen Ableitungen der Funktion lauten

$$D^{(1,0)}f(x,y) = \frac{2y}{(x+y)^2} \quad D^{(0,1)}f(x,y) = -\frac{2x}{(x+y)^2}$$
$$D^{(2,0)}f(x,y) = -\frac{4y}{(x+y)^3} \quad D^{(1,1)}f(x,y) = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3} \quad D^{(0,2)}f(x,y) = \frac{4x}{(x+y)^3}.$$

Das Taylorpolynom erster Ordnung ist somit

$$\begin{aligned} P_1(x,y) &= f(1,1) + D^{(1,0)}f(1,1)\big((x,y)-(1,1)\big)^{(1,0)} + D^{(0,1)}f(1,1)\big((x,y)-(1,1)\big)^{(0,1)} \\ &= \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1) = \frac{1}{2}(x-y). \end{aligned}$$

Das Restglied lautet in Lagrangedarstellung mit Zwischenpunkt (ξ, η)

$$\begin{aligned} R_1(x,y) &= \frac{D^{(2,0)}f(\xi,\eta)}{2!\,0!}\big((x,y)-(1,1)\big)^{(2,0)} + \frac{D^{(1,1)}f(\xi,\eta)}{1!\,1!}\big((x,y)-(1,1)\big)^{(1,1)} \\ &\quad + \frac{D^{(0,2)}f(\xi,\eta)}{0!\,2!}\big((x,y)-(1,1)\big)^{(0,2)} \\ &= \frac{2}{(\xi+\eta)^3}\big(-\eta(x-1)^2 + (\xi-\eta)(x-1)(y-1) + \xi(y-1)^2\big). \end{aligned}$$