Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2013
Institut für Analysis 29.04.2013
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

3. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei K ein Kreis im $\mathbb{R}^2$ vom Radius 1 mit Mittelpunkt $(0,1)$. K rolle ohne Gleiten in positiver Richtung die x-Achse entlang. Ferner bezeichne P den Punkt auf K, der anfangs auf dem Ursprung liege. Skizzieren Sie zunächst die Bahnkurve, die der Punkt P beim Abrollen beschreibt. Geben Sie anschließend eine Parametrisierung dieser Kurve an und berechnen Sie die Bogenlänge des Weges, den der Punkt bei einer vollständigen Umdrehung des Kreises (um den Winkel 2π) beschreibt.

Aufgabe 2

a) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma F \cdot \vec{dx}$ für $F(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ y^2 \end{pmatrix}$ und $\gamma(t) = (t, t^s)$ mit $0 \le t \le 1$ und $s \in (0, \infty)$.

b) Berechnen Sie die Bogenlänge des Graphen der Funktion

$$f : [-b, b] \to \mathbb{R},\ f(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right), \quad \text{wobei } a, b > 0.$$

Aufgabe 3

Sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig. Bestimmen Sie für das rotationssymmetrische Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n, F(x) = f(r)x \quad \text{mit } r(x) = \|x\|$$

eine Stammfunktion.

Aufgabe 4

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend und $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch, das heißt

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Zeigen Sie, dass es eine harmonische Funktion $v \in C^2(\Omega)$ gibt mit

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Aufgabe 5

a) Berechnen Sie jeweils das Kurvenintegral

$$\int_\gamma F \cdot \vec{dx}$$

i) $F(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \\ xy \end{pmatrix}, \qquad \gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (\cos t, \sin t)$

ii) $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ -z \\ x \end{pmatrix}, \qquad \gamma\colon [0,\ln 2] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (\sinh t, \cosh t, \sinh t)$

iii) $F(x,y) = \begin{pmatrix} \sin x \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}, \qquad \gamma\colon [0,2] \mapsto \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{cases} (t,0)\,, & 0 \le t \le 1 \\ (1,t-1)\,, & 1 < t \le 2 \end{cases}$

b) Ein Massepunkt bewege sich unter der Wirkung des Kraftfeldes $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (2xy, x^2+y^2)$ auf dem durch die Punkte $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$, $(0,1)$ und $(-1,2)$ (in dieser Reihenfolge) gebildeten Polygonzug γ. Welche Arbeit $\int_\gamma F \cdot \vec{dx}$ wird hierbei verrichtet?

Aufgabe 6

Die Vektorfelder $F, G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sind gegeben durch

$$F(x,y,z) := \begin{pmatrix} y^2 + 2z^3yx \\ 2y + z^3x^2 \\ y^2 + 3z^2yx^2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad G(x,y,z) := \begin{pmatrix} z^2 \\ e^z \\ ye^z + 2xz \end{pmatrix}.$$

a) Überprüfen Sie jeweils, ob es sich um ein Gradientenfeld handelt, und bestimmen Sie gegebenenfalls ein zugehöriges Potential.

b) Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_\gamma F \cdot \vec{dx} \qquad \text{und} \qquad \int_\gamma G \cdot \vec{dx}\,,$$

wobei die Kurve γ gegeben ist durch $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (1-t, t, 0)$.