Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

SS 2013
29.04.2013

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

3. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei K ein Kreis im $\mathbb{R}^2$ vom Radius 1 mit Mittelpunkt $(0,1)$. K rolle ohne Gleiten in positiver Richtung die x-Achse entlang. Ferner bezeichne P den Punkt auf K, der anfangs auf dem Ursprung liege. Skizzieren Sie zunächst die Bahnkurve, die der Punkt P beim Abrollen beschreibt. Geben Sie anschließend eine Parametrisierung dieser Kurve an und berechnen Sie die Bogenlänge des Weges, den der Punkt bei einer vollständigen Umdrehung des Kreises (um den Winkel 2π) beschreibt.

Lösung:

zur Skizze: Die Bahnkurve ist eine Zykloide. Für eine Skizze siehe bspw. Internet.

Parametrisierung: Der Kreis $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ läßt sich parametrisieren durch $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$ (damit erhält man für $t = 0$ den Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} =: A$; für beliebiges t schließt $\begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$ mit $\overline{0A}$ den Winkel t *im* Uhrzeigersinn ein).

Der Kreis K mit Mittelpunkt $(0,1)$ läßt sich somit parametrisieren durch $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$.
Ist K um den Winkel t *im* Uhrzeigersinn die x-Achse entlanggerollt, so hat sich der Kreismittelpunkt um $\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ verschoben (bei einer vollen Umdrehung also um den Kreisumfang 2π nach rechts).

Folglich läßt sich die gesuchte Kurve parametrisieren durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}, \qquad t \geq 0.$$

Bogenlänge: Schreibe $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} \\ &= \sqrt{2 - 2\cos t} \\ &= \sqrt{2 - 2\left(\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)} \quad \leftarrow \text{Additionstheorem} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \\
&= 2\sin\left(\frac{t}{2}\right) \qquad \text{für } 0 \le t \le 2\pi. \\
\Rightarrow L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|\,dt \\
&= 2\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right)\,dt \\
&= 2\left[-2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi} \\
&= 2(-2\cos\pi + 2\cos 0) \\
&= 8.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

a) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma F \cdot \vec{dx}$ für $F(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ y^2 \end{pmatrix}$ und $\gamma(t) = (t, t^s)$ mit $0 \le t \le 1$ und $s \in (0, \infty)$.

b) Berechnen Sie die Bogenlänge des Graphen der Funktion

$$f : [-b, b] \to \mathbb{R},\ f(x) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right), \quad \text{wobei } a, b > 0.$$

Lösung:

a)

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma F \cdot \vec{dx} &= \int_0^1 \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\,dt \\
&= \int_0^1 \langle (t^{s+1}, t^{2s})^t, (1, st^{s-1})^t\rangle\,dt \\
&= \int_0^1 (t^{s+1} + st^{3s-1})\,dt \\
&= \frac{1}{s+2} + \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

b) Gesucht: Länge der Kurve $\gamma : [-b, b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \left(t, a\cosh\left(\frac{t}{a}\right)\right)$.

$$
\begin{aligned}
L(\gamma) &= \int_{-b}^{b} \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_{-b}^{b} \left\| \left(1, \sinh\left(\frac{t}{a}\right)\right) \right\| \,dt \\
&= \int_{-b}^{b} \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{t}{a}\right)}\,dt = \int_{-b}^{b} \sqrt{\cosh^2\left(\frac{t}{a}\right)}\,dt \\
&= \int_{-b}^{b} \cosh\left(\frac{t}{a}\right)\,dt = \left[a\sinh\left(\frac{t}{a}\right)\right]_{t=-b}^{t=b} \\
&= a\left(\sinh\left(\frac{b}{a}\right) - \sinh\left(\frac{-b}{a}\right)\right) = 2a\sinh\left(\frac{b}{a}\right).
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3

Sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig. Bestimmen Sie für das rotationssymmetrische Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n, F(x) = f(r)x \quad \text{mit } r(x) = \|x\|$$

eine Stammfunktion.

Lösung:
Wir bestimmen zunächst mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung eine Stammfunktion $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ der Funktion $rf(r)$:

$$\begin{aligned} h(r) &= \int_1^r sf(s)\, ds \\ &= r\int_1^r f(s)\, ds - \int_1^r \int_1^s f(t)\, dt\, ds, \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Zeile partiell integriert haben. Definiere nun $g : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ durch $g(x) = h(\|x\|)$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \text{grad } g(x) &= h'(\|x\|) \cdot \text{grad } \|x\| \\ &= \|x\| f(\|x\|) \cdot \frac{x}{\|x\|} \\ &= f(\|x\|)x \\ &= F(x). \end{aligned}$$

Also ist g eine Stammfunktion von F.

Aufgabe 4

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend und $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch, das heißt

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Zeigen Sie, dass es eine harmonische Funktion $v \in C^2(\Omega)$ gibt mit

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Lösung:
Definiere ein C^1-Vektorfeld $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$ durch

$$F = (-\partial_y u, \partial_x u)^t.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} \partial_y F_1 &= -\partial^2_{yy} u \\ &= \partial^2_{xx} u \\ &= \partial_x F_2, \end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass u harmonisch ist. Da Ω nach Voraussetzung einfach zusammenhängend, folgern wir, dass F ein Gradientenfeld ist. Folglich existiert eine Funktion $v \in C^1(\Omega)$ mit $\operatorname{grad} v = F$, also mit $(\partial_x v, \partial_y v)^t = (-\partial_y u, \partial_x u)^t$, bzw.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Da $\partial_x v, \partial_y v \in C^1(\Omega)$, gilt sogar $v \in C^2(\Omega)$. Weiter berechnen wir

$$\begin{aligned} \Delta v &= \partial^2_{xx} v + \partial^2_{yy} v \\ &= \partial_x(-\partial_y u) + \partial_y(\partial_x u) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also ist auch v harmonisch und die Behauptung ist bewiesen.

Aufgabe 5

a) Berechnen Sie jeweils das Kurvenintegral

$$\int_\gamma F \cdot \vec{dx}$$

i) $F(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \\ xy \end{pmatrix}, \qquad \gamma \colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (\cos t, \sin t)$

ii) $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ -z \\ x \end{pmatrix}, \qquad \gamma \colon [0,\ln 2] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (\sinh t, \cosh t, \sinh t)$

iii) $F(x,y) = \begin{pmatrix} \sin x \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}, \qquad \gamma \colon [0,2] \mapsto \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{cases} (t,0)\,, & 0 \le t \le 1 \\ (1,t-1)\,, & 1 < t \le 2 \end{cases}$

b) Ein Massepunkt bewege sich unter der Wirkung des Kraftfeldes $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (2xy, x^2+y^2)$ auf dem durch die Punkte $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$, $(0,1)$ und $(-1,2)$ (in dieser Reihenfolge) gebildeten Polygonzug γ. Welche Arbeit $\int_\gamma F \cdot \vec{dx}$ wird hierbei verrichtet?

Lösung:

a) **i)** Definitionsgemäß ist

$$\begin{aligned} \int_\gamma F \cdot \vec{dx} &= \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} e^{\cos t} \\ \cos t \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-e^{\cos t} \sin t + \sin t \cos^2 t)\, dt = \left[e^{\cos t} - \tfrac{1}{3}\cos^3 t \right]_{t=0}^{2\pi} = 0\,. \end{aligned}$$

ii) Wir benutzen wieder die Definition des Kurvenintegrals:

$$\int_\gamma F \cdot \vec{dx} = \int_0^{\ln 2} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^{\ln 2} \begin{pmatrix} \cosh t \\ -\sinh t \\ \sinh t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \\ \cosh t \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{\ln 2} (\cosh^2 t - \sinh^2 t + \sinh t \cosh t)\, dt = \int_0^{\ln 2} (1 + \sinh t \cosh t)\, dt$$

$$= \ln 2 + \left[\tfrac{1}{2} \sinh^2 t \right]_0^{\ln 2} = \ln 2 + \tfrac{1}{2}\sinh^2(\ln 2) = \ln 2 + \tfrac{1}{2}\big(\tfrac{1}{2}(e^{\ln 2} - e^{-\ln 2})\big)^2 = \ln 2 + \tfrac{9}{32}\,.$$

iii) Die Kurven $\gamma_1 \colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_1(t) = (t,0)$, und $\gamma_2 \colon [1,2] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_2(t) = (1, t-1)$, sind regulär mit $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Somit gilt:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F \cdot \vec{dx} &= \int_{\gamma_1} F \cdot \vec{dx} + \int_{\gamma_2} F \cdot \vec{dx} = \int_0^1 F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t)\, dt + \int_1^2 F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t)\, dt \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} \sin t \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_1^2 \begin{pmatrix} \sin 1 \\ 1 + (t-1)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^1 \sin t\, dt + \int_1^2 \left(1 + (t-1)^2\right) dt = \big[-\cos t\big]_0^1 + \big[t + \tfrac{1}{3}(t-1)^3\big]_1^2 \\
&= (-\cos 1 + 1) + (2 + \tfrac{1}{3} - 1) = \tfrac{7}{3} - \cos 1\,.
\end{aligned}$$

b) Schreibe $F =: (F_1, F_2)$. Da $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend ist, $F \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ gilt und die Verträglichkeitsbedingung

$$\partial_1 F_2(x,y) = \partial_1(x^2 + y^2) = 2x = \partial_2(2xy) = \partial_2 F_1(x,y) \qquad \text{auf } \mathbb{R}^2$$

erfüllt ist, stellt F ein Gradientenfeld dar, d.h. es gibt ein Skalarfeld $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ mit $F = \nabla\varphi$.

Wegen $\partial_x \varphi(x,y) = F_1(x,y) = 2xy$ ist $\varphi(x,y) = x^2 y + \psi(y)$ für eine stetig differenzierbare Funktion $\psi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Aus $\partial_y \varphi(x,y) = F_2(x,y)$ und $\partial_y \varphi(x,y) = x^2 + \psi'(y)$ folgt $\psi'(y) = y^2$. Dies ist beispielsweise für $\psi(y) = \frac{1}{3}\, y^3$ erfüllt. Somit ist

$$\varphi(x,y) = x^2 y + \frac{1}{3}\, y^3$$

ein Potential von F auf $\mathbb{R}^2$. Die Arbeit A ist gleich dem Wert des Kurvenintegrals

$$A = \int_\gamma F \cdot \vec{dx}\,,$$

welches wegen $F = \nabla\varphi$ nur vom Anfangs- und Endpunkt von γ abhängt:

$$A = \varphi(-1,2) - \varphi(0,0) = \frac{14}{3}\,.$$

Aufgabe 6

Die Vektorfelder $F, G \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sind gegeben durch

$$F(x,y,z) := \begin{pmatrix} y^2 + 2z^3 yx \\ 2y + z^3 x^2 \\ y^2 + 3z^2 yx^2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad G(x,y,z) := \begin{pmatrix} z^2 \\ e^z \\ ye^z + 2xz \end{pmatrix}.$$

a) Überprüfen Sie jeweils, ob es sich um ein Gradientenfeld handelt, und bestimmen Sie gegebenenfalls ein zugehöriges Potential.

b) Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_\gamma F \cdot \vec{dx} \qquad \text{und} \qquad \int_\gamma G \cdot \vec{dx}\,,$$

wobei die Kurve γ gegeben ist durch $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (1-t, t, 0)$.

Lösung:

a) Die Funktionen F, G sind stetig differenzierbar und auf ganz $\mathbb{R}^3$ definiert. Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist, gilt: Es handelt sich genau dann um ein Gradientenfeld, wenn die Verträglichkeitsbedingung erfüllt ist. Im $\mathbb{R}^3$ ist dies äquivalent dazu, dass die Rotation verschwindet (siehe Definition der Rotation). Schreibe $F =: (F_1, F_2, F_3)$. Wegen

$$\partial_2 F_3(x,y,z) = 2y + 3z^2x^2\,, \qquad \partial_3 F_2(x,y,z) = 3z^2x^2 \neq \partial_2 F_3(x,y,z)$$

ist $\operatorname{rot} F \neq 0$. Also ist F kein Gradientenfeld, d.h. es gibt kein C^1-Skalarfeld $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $F = \nabla f$.

Für $G =: (G_1, G_2, G_3)$ hingegen gilt

$$\partial_2 G_3 = e^z = \partial_3 G_2\,, \qquad \partial_3 G_1 = 2z = \partial_1 G_3\,, \qquad \partial_1 G_2 = 0 = \partial_2 G_1\,.$$

Somit ist G ein Gradientenfeld, besitzt also ein Potential $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Für dieses Potential muss $\partial_x f(x,y,z) = z^2$ gelten. Integrieren bezüglich x liefert:

$$f(x,y,z) = z^2x + c(y,z)$$

mit einer gewissen Funktion $c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. (Die "Integrationskonstante" kann also noch von y und z abhängen.) Es folgt $\partial_y f(x,y,z) = \partial_y c(y,z)$, und dies soll $= e^z$ sein. Daher haben wir $c(y,z) = ye^z + d(z)$ mit einer gewissen Funktion $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir wissen also

$$f(x,y,z) = z^2x + ye^z + d(z)\,,$$

und hieraus folgt $\partial_z f(x,y,z) = 2zx + ye^z + d'(z)$. Damit dies gleich der dritten Komponente von G wird, muss $d' = 0$ gelten. Wir wählen $d = 0$ und haben ein Potential von G:

$$f(x,y,z) = z^2x + ye^z\,.$$

b) Bei F rechnen wir das Kurvenintegral anhand der Definition aus:

$$\int_\gamma F \cdot d\vec{x} = \int_0^1 F\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \left[-\tfrac{1}{3}t^3 + t^2\right]_0^1 = \tfrac{2}{3}\,.$$

Bei G dagegen können wir auf das oben bestimmte Potential f zurückgreifen:

$$\int_\gamma G \cdot d\vec{x} = f\big(\gamma(1)\big) - f\big(\gamma(0)\big) = f(0,1,0) - f(1,0,0) = 1 - 0 = 1\,.$$