Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

SS 2013
06.05.2013

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

4. Übungsblatt

Aufgabe 1

Bestimmen Sie ein $\varepsilon > 0$ und eine geeignete Definitionsmenge $D \subset \mathbb{R}^2$, so dass die Abbildung $f : D \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \varepsilon \|x\|^2 x$ die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt (und damit auf D genau einen Fixpunkt besitzt).

Aufgabe 2

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Ferner gebe es ein $c > 0$ mit

$$\|f(x) - f(y)\| \geq c\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie:

a) f ist injektiv.

b) $Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist injektiv für jedes $x \in \mathbb{R}^n$.

c) $f(\mathbb{R}^n)$ ist offen und abgeschlossen.

d) f ist ein C^1-Diffeomorphismus.

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie, dass es ein Intervall $U \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in U$ und eindeutig bestimmte Funktionen $y : U \to \mathbb{R}$ sowie $z : U \to \mathbb{R}$ so gibt, dass $y(0) = z(0) = 1$ und

$$\begin{aligned} e^{y-z} &= y + x\sqrt{z} \\ y^z &= z^{xy} \end{aligned}$$

für alle $x \in U$.

b) Bestimmen Sie $y'(0)$ und $z'(0)$.

Aufgabe 4

Die *Inversion an der Einheitssphäre* ist gegeben durch

$$I : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \qquad x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}.$$

Zeigen Sie, dass I ein C^∞-Diffeomorphismus ist. Bestimmen Sie die Umkehrabbildung I^{-1} und berechnen Sie für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ die Jacobimatrix $DI(x)$, sowie $(DI(x))^{-1}$ und $\det DI(x)$. Bestimmen Sie schließlich die Fixpunktmenge $\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : I(x) = x\}$.

Aufgabe 5

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \cosh x \, \cos y \\ \sinh x \, \sin y \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie: Es gibt eine Umgebung U von $(\log 2, \frac{\pi}{2})$ und eine Umgebung V von $(0, \frac{3}{4})$ so, dass U durch die Funktion f bijektiv auf V abgebildet wird. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion in $(0, \frac{3}{4})$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion f in jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x > 0$ lokal invertierbar ist, aber dass f nicht injektiv ist.

c) Berechnen Sie $f(G)$ für den Streifen

$$G := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < y < \tfrac{\pi}{2}\right\}$$

Aufgabe 6

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $z^3 + 2z^2 - 3xyz + x^3 - y^3 = 0$ in einer Umgebung von $(0,0,-2)$ nach z aufgelöst werden kann. Berechnen Sie für die dadurch implizit definierte Funktion $g(x,y)$ die Ableitung $g'(x,y)$.

b) Betrachten Sie die beiden Gleichungen

$$x^2 + y^2 - u^2 + v^2 = 0 \qquad \text{und} \qquad x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 = 1.$$

Zeigen Sie: Durch diese Gleichungen werden in einer Umgebung des Punktes $(0,0)$ zwei C^1-Funktionen $u(x,y)$ und $v(x,y)$ mit $u(0,0) = v(0,0) = 1$ implizit definiert.

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung dieser Funktionen in $(0,0)$.