Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2013
Institut für Analysis 06.05.2013
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

4. Übungsblatt

Aufgabe 1

Bestimmen Sie ein $\varepsilon > 0$ und eine geeignete Definitionsmenge $D \subset \mathbb{R}^2$, so dass die Abbildung $f : D \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \varepsilon \|x\|^2 x$ die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt (und damit auf D genau einen Fixpunkt besitzt).

Lösung:
Wir berechnen

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \varepsilon \|x\|^2 x - \varepsilon \|y\|^2 y \\ &= \varepsilon \|x\|^2 (x-y) + \varepsilon(\|x\|^2 - \|y\|^2) y \\ &= \varepsilon \|x\|^2 (x-y) + \varepsilon((\|x\| + \|y\|)(\|x\| - \|y\|)) y \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &\leq \varepsilon \|x\|^2 \|x-y\| + \varepsilon(\|x\| + \|y\|)\|y\| |\|x\| - \|y\|| \\ &\leq 3\varepsilon \max\{\|x\|^2, \|y\|^2\} \|x-y\|, \end{aligned}$$

wobei wir in der unteren Zeile die umgekehrte Dreiecksungleichung verwendet haben.

Wähle nun beispielsweise $D = \overline{B_3(0)}$ und $\varepsilon = \frac{1}{108}$. Dann gilt $\|f(x) - f(y)\| \leq \frac{1}{4}\|x-y\|$ für alle $x, y \in D$. Insbesondere ist f auf D eine Kontraktion. Ferner gilt $\|f(x) - f(0)\| \leq \frac{1}{4}\|x\| \leq \frac{3}{4}$ für alle $x \in D$. Es folgt $\|f(x)\| \leq \|f(0)\| + \frac{3}{4} = \sqrt{5} + \frac{3}{4} < 3$ für $x \in D$. Damit ist f auf D eine Selbstabbildung und alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind erfüllt.

Aufgabe 2

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Ferner gebe es ein $c > 0$ mit

$$\|f(x) - f(y)\| \geq c\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie:

a) f ist injektiv.

b) $Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist injektiv für jedes $x \in \mathbb{R}^n$.

c) $f(\mathbb{R}^n)$ ist offen und abgeschlossen.

d) f ist ein C^1-Diffeomorphismus.

Lösung:

a) Für $x \neq y$ ist $\|f(x) - f(y)\| \geq c\|x - y\| > 0$, also $f(x) \neq f(y)$. Damit ist f injektiv.

b) Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|Df(x)y\| &= \lim_{t\to 0} \frac{\|f(x+ty) - f(x)\|}{|t|} \\ &\geq \lim_{t\to 0} \frac{c\|(x+ty) - x\|}{|t|} \\ &= c\|y\|. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $Df(x)y = 0$ genau dann, wenn $y = 0$. Da $Df(x)$ linear ist, folgt daraus die Injektivität.

c) Nach Teil b) ist $Df(x)$ injektiv (und damit surjektiv) für jedes $x \in \mathbb{R}^n$, damit also invertierbar. Aus dem Satz über inverse Funktionen folgt, dass $f(\mathbb{R}^n)$ offen ist. Sei nun $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset f(\mathbb{R}^n)$ eine in $\mathbb{R}^n$ konvergente Folge mit Grenzwert $y \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es x_n mit $f(x_n) = y_n$. Die Voraussetzung ergibt $\|x_k - x_n\| \leq \frac{1}{c}\|f(x_k) - f(x_n)\| = \frac{1}{c}\|y_k - y_n\|$, d.h. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge und konvergiert gegen ein $x \in \mathbb{R}^n$. Aus der Stetigkeit von f folgt

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

Damit gilt $y \in f(\mathbb{R}^n)$ und $f(\mathbb{R}^n)$ ist abgeschlossen.

d) Es gilt: $\mathbb{R}^n = f(\mathbb{R}^n)$. Gäbe es nämlich ein $z \in \mathbb{R}^n \backslash f(\mathbb{R}^n)$, dann würde die Strecke zwischen $f(0)$ und z den Rand $\partial(f(\mathbb{R}^n))$ in einem Punkt ξ schneiden. Da f abgeschlossen, gilt $\xi \in f(\mathbb{R}^n)$. Dies aber ist ein Widerspruch zu $f(\mathbb{R}^n)$ offen. Es folgt $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$. Damit ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bijektiv, also invertierbar. Aus dem Satz über inverse Funktionen folgt, dass f sogar ein C^1-Diffeomorphismus ist.

Anmerkung: Allgemeiner gilt: Ist $Y \subset X$ eine nichtleere, offene und abgeschlossene Teilmenge eines zusammenhängenden topologischen Raumes X, so gilt $Y = X$.

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie, dass es ein Intervall $U \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in U$ und eindeutig bestimmte Funktionen $y : U \to \mathbb{R}$ sowie $z : U \to \mathbb{R}$ so gibt, dass $y(0) = z(0) = 1$ und

$$\begin{aligned} e^{y-z} &= y + x\sqrt{z} \\ y^z &= z^{xy} \end{aligned}$$

für alle $x \in U$.

b) Bestimmen Sie $y'(0)$ und $z'(0)$.

Lösung:
Schreibe $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

a) Sei

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2, f(x,y,z) := \begin{pmatrix} e^{y-z} - y - x\sqrt{z} \\ y^z - z^{xy} \end{pmatrix}$$

Wir schreiben $Df = (D_x f, D_{(y,z)} f) \in (\mathbb{R}^{2\times 1}, \times \mathbb{R}^{2\times 2})$ und berechnen

$$D_{(y,z)} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^{y-z} - 1 & -e^{y-z} - \frac{x}{2\sqrt{z}} \\ zy^{z-1} - x(\log z) z^{xy} & (\log y) y^z - xyz^{xy-1} \end{pmatrix},$$

insbesondere

$$D_{(y,z)} f(0,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da $D_{(y,z)} f(0,1,1)$ invertierbar ist, läßt sich nach dem Satz über implizite Funktionen das Gleichungssystem $f(x,y,z) = 0$ lokal um den Punkt $(0,1,1)$ nach (y,z) auflösen. Also gibt es Umgebungen $U \subseteq \mathbb{R}$ von 0 und $V \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ von $(1,1)$ sowie genau eine Funktion $g : U \to V$, $g(x) = (y(x), z(x))$, so dass

- $y(0) = z(0) = 1$,
- $f(x, y(x), z(x)) = 0$ für alle $x \in U$.

b) Die Funktion g hat die Ableitung $g'(0) = -(D_{(y,z)} f(0,1,1))^{-1} D_x f(0,1,1)$, also

$$g'(0) = \begin{pmatrix} y'(0) \\ z'(0) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

wobei wir

$$D_x f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\sqrt{z} \\ -y(\log z) z^{xy} \end{pmatrix}$$

benutzt haben.

Aufgabe 4

Die *Inversion an der Einheitssphäre* ist gegeben durch

$$I : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \qquad x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}.$$

Zeigen Sie, dass I ein C^∞-Diffeomorphismus ist. Bestimmen Sie die Umkehrabbildung I^{-1} und berechnen Sie für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ die Jacobimatrix $DI(x)$, sowie $(DI(x))^{-1}$ und $\det DI(x)$. Bestimmen Sie schließlich die Fixpunktmenge $\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : I(x) = x\}$.

Lösung:
Aus der Definition von I folgt $I \circ I = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$. Dies impliziert bereits, dass I bijektiv ist und $I^{-1} = I$. Wir bestimmen nun $DI(x)$: Es gilt

$$I_j = \frac{x_j}{x_1^2 + \ldots + x_n^2},$$

also

$$\begin{aligned} \partial_i I_j(x) &= \frac{(\partial_i x_j)(x_1^2 + \ldots x_n^2) - x_j \cdot 2x_i}{(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^2} \\ &= \frac{\delta_{ij}\|x\|^2 - 2x_i x_j}{\|x\|^4}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$DI(x) = \frac{1}{\|x\|^2}\left(\mathbb{E}_n - 2\frac{xx^t}{\|x\|^2}\right).$$

Differenzierbarkeit höherer Ordnung: Sei $j \in \{1, \ldots, n\}$. Man zeigt induktiv leicht, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ jede partielle Ableitung k-ter Ordnung von I_j existiert und gleich einem Ausdruck der Form $\frac{P_k(x_1,\ldots,x_n)}{\|x\|^{2^{k+1}}}$ ist (wobei $P_k(x_1, \ldots, x_n)$ ein Polynom in $x_1, \ldots, x_n$ ist), insbesondere selbst wieder differenzierbar (und damit auch stetig). Insbesondere ist f in C^∞.

Wegen $f^{-1} = f$ ist auch f^{-1} in C^∞. Also ist f ein C^∞-Diffeomorphismus.

Berechnung von $(DI(x))^{-1}$*:* Es gilt $I \circ I(x) = x$. Aus der Kettenregel folgt

$$DI(I(x)) \cdot DI(x) = \mathbb{E}_n.$$

Es folgt $(DI(x))^{-1} = DI(I(x))$. Einsetzen in obige Formel für DI ergibt nach kurzer Rechnung schließlich

$$(DI(x))^{-1} = \|x\|^2\left(\mathbb{E}_n - 2\frac{xx^t}{\|x\|^2}\right).$$

Berechnung von $\det DI(x)$*:* Für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt

$$\begin{aligned} 1 = \det \mathbb{E}_n &= \det(DI(x) \cdot (DI(x))^{-1}) \\ &= \det(DI(x) \cdot \|x\|^4 DI(x)) \\ &= \|x\|^{4n}(\det DI(x))^2. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\det DI(x) = \frac{1}{\|x\|^{2n}} \quad \text{oder} \quad \det DI(x) = -\frac{1}{\|x\|^{2n}}.$$

Insbesondere gilt $\det DI(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Da die Determinantenfunktion stetig und $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ zusammenhängend ist, folgt $\det DI(x) = \frac{1}{\|x\|^{2n}}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, oder $\det DI(x) = -\frac{1}{\|x\|^{2n}}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Wegen

$$\det DI(e_1) = \det(-e_1, e_2, \ldots, e_n) = -1 < 0$$

folgt schließlich

$$\det DI(x) = -\frac{1}{\|x\|^{2n}} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Alternativ: Man überlegt sich leicht, dass $\mathbb{E}_n - 2\frac{xx^t}{\|x\|^2}$ die Spiegelung an der Ebene senkrecht zu x beschreibt. Diese hat Determinante -1. Daraus ergibt sich die Determinante für $DI(x)$.

Bestimmung der Fixpunktmenge: Es gilt

$$I(x) = \frac{x}{\|x\|^2} = x \qquad \Leftrightarrow \qquad \|x\| = 1.$$

Also ist

$$\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : I(x) = x\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\} = \mathbb{S}^{n-1}.$$

Aufgabe 5

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \cosh x \, \cos y \\ \sinh x \, \sin y \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie: Es gibt eine Umgebung U von $(\log 2, \frac{\pi}{2})$ und eine Umgebung V von $(0, \frac{3}{4})$ so, dass U durch die Funktion f bijektiv auf V abgebildet wird. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion in $(0, \frac{3}{4})$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion f in jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x > 0$ lokal invertierbar ist, aber dass f nicht injektiv ist.

c) Berechnen Sie $f(G)$ für den Streifen

$$G := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 < y < \tfrac{\pi}{2}\big\}$$

Lösung:

a) Der Umkehrsatz liefert die Behauptung, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: Die Funktion f ist stetig differenzierbar, es gilt $f(\log 2, \frac{\pi}{2}) = (0, \frac{3}{4})$ und die Matrix $Df(\log 2, \frac{\pi}{2})$ ist regulär. Wir überprüfen diese Voraussetzungen: Die stetige Differenzierbarkeit ist offensichtlich. Weiter ist

$$f(\log 2, \tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} \cosh(\log 2) \, \cos \frac{\pi}{2} \\ \sinh(\log 2) \, \sin \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sinh(\log 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/4 \end{pmatrix},$$

denn $\sinh(\log 2) = \frac{1}{2}(e^{\log 2} - e^{-\log 2}) = \frac{1}{2}(2 - \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$. Schließlich gilt

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} \sinh x \, \cos y & -\cosh x \, \sin y \\ \cosh x \, \sin y & \sinh x \, \cos y \end{pmatrix},$$

und damit ist

$$Df(\log 2, \tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -\cosh(\log 2) \\ \cosh(\log 2) & 0 \end{pmatrix}$$

regulär, denn $\cosh(\log 2) = \frac{1}{2}(2+\frac{1}{2}) = \frac{5}{4} \neq 0$.

Nach dem Umkehrsatz gilt

$$D\big(f^{-1}\big)(0, \tfrac{3}{4}) = \big(Df(f^{-1}(0, \tfrac{3}{4}))\big)^{-1} = \big(Df(\log 2, \tfrac{\pi}{2})\big)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -5/4 \\ 5/4 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 4/5 \\ -4/5 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Die Funktion f ist überall stetig differenzierbar und für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\det Df(x,y) = (\sinh x \, \cos y)^2 + (\cosh x \, \sin y)^2 .$$

Diese Determinante wird also nur dann 0, wenn $\sinh x \cos y = 0$ und $\cosh x \sin y = 0$ gilt. Für $x > 0$ ist dies gleichbedeutend mit $\cos y = 0$ und $\sin y = 0$, kann also nie eintreten. Folglich ist für $x > 0$ die Matrix $Df(x,y)$ stets regulär. Der Umkehrsatz liefert nun die lokale Invertierbarkeit von f in jedem Punkt $(x,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$.

Trotzdem ist die Funktion f auf $(0,\infty)\times\mathbb{R}$ nicht injektiv wegen $f(x, y+2\pi) = f(x,y)$ für $(x,y) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}$.

c) Es gilt:

$$\begin{aligned} \cosh(\mathbb{R}) &= [1,\infty), & \sinh(\mathbb{R}) &= (-\infty,\infty) \\ \sin\big((0,\tfrac{\pi}{2})\big) &= (0,1), & \cos\big((0,\tfrac{\pi}{2})\big) &= (0,1) \end{aligned}$$

Somit folgt:

$$f(G) = f\left(\mathbb{R}\times(0,\tfrac{\pi}{2})\right) \subset (0,\infty)\times(-\infty,\infty).$$

Wir schreiben $f = (f_1, f_2)$. Gilt $f_2(x,y) = 0$ für $(x,y) \in \mathbb{R}\times(0,\frac{\pi}{2})$, so folgt $x = 0$. Dann ist $f(x,y) = \begin{pmatrix}\cos y \\ 0\end{pmatrix} \in (0,1)\times\{0\}$. Es folgt

$$f(G) \subset ((0,\infty)\times(-\infty,\infty)) \setminus ([1,\infty)\times\{0\}) .$$

Tatsächlich gilt sogar $f(G) = ((0,\infty)\times(-\infty,\infty)) \setminus ([1,\infty)\times\{0\})$. Wir zeigen dazu, dass $f(G)$ offen und abgeschlossen in $((0,\infty)\times(-\infty,\infty)) \setminus ([1,\infty)\times\{0\})$ ist. Da $((0,\infty)\times(-\infty,\infty)) \setminus ([1,\infty)\times\{0\})$ zusammenhängend ist, folgt daraus die Aussage.

- $f(G)$ ist offen: Mit der Rechnung aus Teil b) zeigt man, dass $Df(x,y)$ invertierbar ist für alle $(x,y) \in \mathbb{R}\times(0,\frac{\pi}{2})$. Mit dem Umkehrsatz folgt, dass $f(G)$ offen ist.
- $f(G)$ ist abgeschlossen (in $((0,\infty)\times(-\infty,\infty)) \setminus ([1,\infty)\times\{0\})$): Sei $w_k \in f(G)$ mit $w_k \to w_0 \in ((0,\infty)\times(-\infty,\infty)) \setminus ([1,\infty)\times\{0\})$ für $k\to\infty$. Zu zeigen ist $w_0 \in f(G)$. Da $w_k \in f(G)$, gibt es $(x_k, y_k) \in \mathbb{R}\times(0,\frac{\pi}{2})$ mit $f(x_k,y_k) = w_k$. Nach Übergang zu einer Teilfolge gilt $y_k \to y_0 \in [0,\frac{\pi}{2}]$. Dann gilt $\cos y_0 > 0$ oder $\sin y_0 > 0$. Aus der Konvergenz von $f(x_k,y_k)$ folgt damit, dass x_k beschränkt ist. Nach Übergang zu einer weiteren Teilfolge können wir $x_k \to x_0 \in \mathbb{R}$ annehmen.

  Wegen $w_0 \in (0,\infty)\times(-\infty,\infty)$ gilt $y_0 < \frac{\pi}{2}$. Angenommen es gilt $y_0 = 0$. Dann wäre aber $w_0 \in [1,\infty)\times\{0\}$. Also gilt $0 < y_0 < \frac{\pi}{2}$. Aus der Stetigkeit von f folgt $w_0 = f(x_0,y_0)$ mit $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}\times(0,\frac{\pi}{2})$, also $w_0 \in f(G)$.

Insgesamt erhalten wir

$$f(G) = ((0,\infty) \times (-\infty,\infty)) \setminus ([1,\infty) \times \{0\}) \,.$$

Aufgabe 6

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $z^3 + 2z^2 - 3xyz + x^3 - y^3 = 0$ in einer Umgebung von $(0,0,-2)$ nach z aufgelöst werden kann. Berechnen Sie für die dadurch implizit definierte Funktion $g(x,y)$ die Ableitung $g'(x,y)$.

b) Betrachten Sie die beiden Gleichungen

$$x^2 + y^2 - u^2 + v^2 = 0 \qquad \text{und} \qquad x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 = 1.$$

Zeigen Sie: Durch diese Gleichungen werden in einer Umgebung des Punktes $(0,0)$ zwei C^1-Funktionen $u(x,y)$ und $v(x,y)$ mit $u(0,0) = v(0,0) = 1$ implizit definiert.

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung dieser Funktionen in $(0,0)$.

Lösung:

a) Die behauptete Auflösbarkeit folgt mit dem Satz über implizit definierte Funktionen, wenn wir

$$f(0,0,-2) = 0 \qquad \text{und} \qquad \partial_3 f\,(0,0,-2) \neq 0$$

für die stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) := z^3 + 2z^2 - 3xyz + x^3 - y^3$, überprüft haben. Es gilt $f(0,0,-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 = 0$ und

$$\partial_3 f\,(x,y,z) = 3z^2 + 4z - 3xy\,, \qquad \text{also} \qquad \partial_3 f\,(0,0,-2) = 3(-2)^2 + 4(-2) = 4 \neq 0\,,$$

womit die Behauptung bereits bewiesen ist. Für die Ableitung gilt

$$\begin{aligned} g'(x,y) &= -\Big(\partial_z f\big(x,y,g(x,y)\big)\Big)^{-1} D_{(x,y)} f\big(x,y,g(x,y)\big) \\ &= -\frac{1}{3g(x,y)^2 + 4g(x,y) - 3xy} \begin{pmatrix} -3yg(x,y) + 3x^2 & -3xg(x,y) - 3y^2 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Anmerkung: Notation hier: $g'(x,y) = Dg(x,y)$.

b) Wir müssen zeigen, dass in der Nähe von $(0,0,1,1)$ durch die Gleichung

$$f(x,y,u,v) = 0\,, \qquad \text{mit} \quad f(x,y,u,v) := \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - u^2 + v^2 \\ x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 - 1 \end{pmatrix}$$

implizite Funktionen u und v definiert werden. Offenbar ist $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar; zudem sieht man sofort, dass $f(0,0,1,1) = 0$ gilt; die ersten zwei Voraussetzungen des Satzes über implizit definierte Funktionen sind also erfüllt. Jetzt müssen wir nur noch prüfen, ob die Matrix $D_{(u,v)} f(0,0,1,1)$ regulär ist. Wegen

$$Df(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2u & 2v \\ 2x & 4y & -6u & 8v \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad D_{(u,v)} f(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} -2u & 2v \\ -6u & 8v \end{pmatrix}$$

und damit $D_{(u,v)}f(0,0,1,1) = \left(\begin{smallmatrix}-2 & 2\\ -6 & 8\end{smallmatrix}\right)$. Diese Matrix ist tatsächlich regulär, denn $\det\left(\begin{smallmatrix}-2 & 2\\ -6 & 8\end{smallmatrix}\right) = -4 \neq 0$.

Somit sind die Voraussetzungen des Satzes über implizit definierte Funktionen erfüllt. Danach gibt es eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ von $(0,0)$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g\colon U \to \mathbb{R}^2$ mit $g(0,0) = (1,1)$ und $f(x,y,g(x,y)) = 0$ für alle $(x,y) \in U$. Definiert man u als die erste Komponentenfunktion von g und v als die zweite Komponentenfunktion von g, dann leisten $u, v\colon U \to \mathbb{R}$ das Gewünschte. Außerdem ergibt sich für $(x,y) \in U$

$$\begin{aligned} Dg(x,y) &= -\left(D_{(u,v)}f(x,y,g(x,y))\right)^{-1} D_{(x,y)}f(x,y,g(x,y)) \\ &= -\left(D_{(u,v)}f(x,y,u(x,y),v(x,y))\right)^{-1} D_{(x,y)}f(x,y,u(x,y),v(x,y)) \\ &= -\begin{pmatrix} -2u(x,y) & 2v(x,y) \\ -6u(x,y) & 8v(x,y) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & 4y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Insbesondere für $(x,y) = (0,0)$ ist der zweite Faktor die Nullmatrix, so dass dann

$$Dg(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist. Dies bedeutet, dass $\partial_1 u(0,0) = \partial_2 u(0,0) = \partial_1 v(0,0) = \partial_2 v(0,0)$ gilt.

Dieses Ergebnis kann man auch folgendermaßen herleiten: Bilden wir in den beiden Gleichungen $x^2+y^2-u^2+v^2 = 0$ und $x^2+2y^2-3u^2+4v^2 = 1$ die partielle Ableitung nach x, wobei wir $u = u(x,y)$ und $v = v(x,y)$ jetzt als die implizit definierten Funktionen auffassen, so ergibt sich

$$2x - 2u\partial_1 u + 2v\partial_1 v = 0 \qquad \text{und} \qquad 2x - 6u\partial_1 u + 8v\partial_1 v = 0\,.$$

Einsetzen von $x = y = 0$ liefert wegen $u(0,0) = v(0,0) = 1$ die Gleichungen

$$-2\partial_1 u(0,0) + 2\partial_1 v(0,0) = 0 \qquad \text{und} \qquad -6\partial_1 u(0,0) + 8\partial_1 v(0,0) = 0\,.$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat als Lösung nur $\partial_1 u(0,0) = \partial_1 v(0,0) = 0$.

Um die partiellen Ableitungen nach y der implizit definierten Funktionen $u = u(x,y)$ und $v = v(x,y)$ zu berechnen, gehen wir analog wie eben vor. Wir bilden in beiden Gleichungen $x^2+y^2-u^2+v^2 = 0$ und $x^2+2y^2-3u^2+4v^2 = 1$ die partielle Ableitung nach y und erhalten

$$2y - 2u\partial_2 u + 2v\partial_2 v = 0 \qquad \text{und} \qquad 4y - 6u\partial_2 u + 8v\partial_2 v = 0\,.$$

Einsetzen von $x = y = 0$ liefert wegen $u(0,0) = v(0,0) = 1$ die Gleichungen

$$-2\partial_2 u(0,0) + 2\partial_2 v(0,0) = 0 \qquad \text{und} \qquad -6\partial_2 u(0,0) + 8\partial_2 v(0,0) = 0\,.$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat als Lösung nur $\partial_2 u(0,0) = \partial_2 v(0,0) = 0$.