Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

SS 2013
13.05.2013

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

5. Übungsblatt

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die globalen Extrema der Funktion $f(x, y, z) = 5x + y - 3z$ auf der Menge $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie alle Minima und Maxima der Funktion $f(x, y) = 4x^2 - 3xy$ auf der Menge $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Aufgabe 3

Sei $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$. Zeigen Sie, dass $M \setminus \{0\}$ eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist, aber nicht ganz M.

Aufgabe 4

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ eine stetig differenzierbare ebene Kurve, die wir uns in der (x, z)-Ebene des $\mathbb{R}^3$ mit Koordinaten x, y, z vorstellen, d.h. $x(t) = \alpha_1(t)$, $z(t) = \alpha_2(t)$. Wir setzen außerdem voraus, dass die Kurve regulär ist, d.h. $\alpha'(t) \neq (0, 0)$ für alle $t \in I$. Wird die Kurve um die z-Achse rotiert, so entsteht eine Fläche M.

Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung $F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $(t, \varphi) \mapsto F(t, \varphi)$, der Fläche M. Untersuchen Sie, unter welchen Voraussetzungen F eine Immersion ist und die Fläche M eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 5

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} (xy + y^2)\, d(x,y)$$

b) $$\iint\limits_{[-1,0]\times[0,2]} \cosh(2x + y)\, d(x,y)$$

Aufgabe 6

Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Fubini die folgenden Integrale:

a) $$\int_Q y \sin(xy)\, d\mu, \qquad Q = [0,1] \times [0, \pi/2],$$

b) $$\int_Q \frac{x^2 z^3}{1 + y^2}\, d\mu, \qquad Q = [0,1] \times [0,1] \times [0,1],$$

c) $$\int_Q \sin(x + y + z)\, d\mu, \qquad Q = [0,\pi] \times [0,\pi] \times [0,\pi].$$