Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2013
Institut für Analysis 13.05.2013
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

**Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik**

**5. Übungsblatt**

## Aufgabe 1

Bestimmen Sie die globalen Extrema der Funktion $f(x,y,z) = 5x + y - 3z$ auf der Menge $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 0,\ x^2+y^2+z^2 = 1\}$.

**Lösung:**
Da die Menge $S$ beschränkt und abgeschlossen ist, nimmt die stetige Funktion $f$ dort ihr Minimum und ihr Maximum an; die Existenz der globalen Extrema ist also gesichert. Definiere

$$g(x,y,z) := \begin{pmatrix} g_1(x,y,z) \\ g_2(x,y,z) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x+y+z \\ x^2+y^2+z^2-1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ g(x,y,z) = (0,0)\}$. Zur Bestimmung der globalen Extrema von $f$ auf $S$ verwenden wir die Multiplikatorenregel von Lagrange. Zunächst überprüfen wir die Voraussetzungen: Sowohl $f$ als auch $g$ sind auf $\mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar. Wegen

$$Dg(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

gilt $\operatorname{rang} Dg(x,y,z) < 2$ genau für $x = y = z$; solche Punkte können jedoch die Nebenbedingungen $g_1(x,y,z) = 0$ und $g_2(x,y,z) = 0$ nicht erfüllen, denn aus $x+y+z = 0$ folgte dann $x = y = z = 0$ im Widerspruch zu $x^2+y^2+z^2 = 1$. Also erhalten wir sämtliche Kandidaten für Extremstellen durch Anwenden der Multiplikatorenregel von Lagrange: Wir setzen

$$\begin{aligned} L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &:= f(x,y,z) + \lambda_1 g_1(x,y,z) + \lambda_2 g_2(x,y,z) \\ &= 5x + y - 3z + \lambda_1(x+y+z) + \lambda_2(x^2+y^2+z^2-1) \end{aligned}$$

und lösen dann das Gleichungssystem $\nabla L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = 0$, also die fünf Gleichungen

$$\begin{gathered} 5 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x = 0\,, \qquad 1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 y = 0\,, \qquad -3 + \lambda_1 + 2\lambda_2 z = 0\,, \\ x+y+z = 0\,, \qquad x^2+y^2+z^2-1 = 0\,. \end{gathered}$$

Addition der ersten drei Gleichungen liefert

$$3 + 3\lambda_1 + 2\lambda_2(x+y+z) = 0\,,$$

wegen $x+y+z = 0$ also $\lambda_1 = -1$. Damit wird die erste Gleichung zu $4 + 2\lambda_2 x = 0$, was insbesondere $\lambda_2 \neq 0$ bedeutet. Die zweite Gleichung lautet $2\lambda_2 y = 0$, woraus mit $\lambda_2 \neq 0$

sofort $y = 0$ folgt. Aus $x + y + z = 0$ ergibt sich dann $z = -x$ und in $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ eingesetzt folgt $2x^2 = 1$, d.h. $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ oder $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Die extremwertverdächtigen Stellen sind damit

$$\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, 0, -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) \qquad \text{und} \qquad \left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right).$$

Die Funktionswerte dort sind $f(\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$ bzw. $f(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}$. Folglich besitzt $f$ auf der Menge $S$ das Maximum $4\sqrt{2}$ und das Minimum $-4\sqrt{2}$.

## Aufgabe 2

Bestimmen Sie alle Minima und Maxima der Funktion $f(x, y) = 4x^2 - 3xy$ auf der Menge $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

**Lösung:**
Zunächst Bestimmung der lokalen Extrema von $f$ im Inneren von D, d.h. in

$$\operatorname{int} D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

Die Funktion $f$ ist in $\mathbb{R}^2$ beliebig oft stetig partiell differenzierbar mit

$$Df(x, y) = (8x - 3y, -3x),$$

daher ist für das Vorliegen eines lokalen Extremums von $f$ in $(x, y) \in \operatorname{int} D$ *notwendig:*

$$Df(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (8x - 3y, -3x) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0).$$

Es gilt für die Hesse-Matrix

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = D^2 f(0, 0).$$

$D^2 f(0, 0)$ ist aber indefinit, denn

$$\det \begin{pmatrix} 8 - t & -3 \\ -3 & -t \end{pmatrix} = t^2 - 8t - 9 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \vee t = 9$$

($D^2 f(0, 0)$ hat einen positiven und einen negativen Eigenwert). Die Funktion $f$ besitzt also keine lokalen Extrema in $\operatorname{int} D$.

Wir bestimmen nun die lokalen Extrema von $f$ auf dem Rand von $D$, d.h. auf

$$\partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Man bestimmt also die Extrema von $f$ unter der Nebenbedingung

$$g(x, y) := x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Dazu ist *notwendig*:

$$
\begin{aligned}
& Df(x,y) = \lambda Dg(x,y) \\
\Leftrightarrow\quad & (8x-3y,-3x) = \lambda(2x,2y) \\
\Leftrightarrow\quad & (8x-3y = 2\lambda x) \wedge (-3x = 2\lambda y) \\
\Leftrightarrow\quad & ((8-2\lambda)x - 3y = 0) \wedge \left(x = -\frac{2}{3}\lambda y\right) \\
\Leftrightarrow\quad & \left((8-2\lambda)\left(-\frac{2}{3}\lambda y\right) - 3y = 0\right) \wedge \left(x = -\frac{2}{3}\lambda y\right) \\
\Leftrightarrow\quad & \left(\left(\frac{4}{3}\lambda^2 - \frac{16}{3}\lambda - 3\right) y = 0\right) \wedge \left(x = -\frac{2}{3}\lambda y\right) \\
\Leftrightarrow\quad & \left(\left(\frac{4}{3}\lambda^2 - \frac{16}{3}\lambda - 3 = 0\right) \vee (y=0)\right) \wedge (x = -\frac{2}{3}\lambda y).
\end{aligned}
$$

I.) $y = 0$: Dann ist auch $x = 0$. Da aber $g(0,0) \neq 0$ ist dieser Fall für uns belanglos.
II.) $y \neq 0$:

$$\frac{4}{3}\lambda^2 - \frac{16}{3}\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow (\lambda = -\frac{1}{2}) \vee (\lambda = \frac{9}{2}).$$

Also nur Punkte der folgenden Form können Extrema sein:

$$\left(\frac{1}{3}y, y\right) \text{ bzw. } (-3y, y).$$

Nun gilt weiter:

$$
\begin{aligned}
g\left(\frac{1}{3}y, y\right) &= \frac{10}{9}y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(y = -\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \vee \left(y = \frac{3}{\sqrt{10}}\right), \\
g(-3y, y) = 10y^2 - 1 &= 0 \Leftrightarrow \left(y = -\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \vee \left(y = \frac{1}{\sqrt{10}}\right).
\end{aligned}
$$

Also nur die vier folgenden Punkte können Extrema sein

$$
\begin{gathered}
\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right), \ \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right), \\
\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right), \ \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right).
\end{gathered}
$$

Durch Einsetzen der Punkte in $f$ erhält man:

$$
\begin{aligned}
f\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right) &= -\frac{1}{2}, \\
f\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = f\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right) &= \frac{9}{2}.
\end{aligned}
$$

Da $\partial D$ kompakt und $f$ stetig ist, nimmt $f$ auf $\partial D$ Minimum und Maximum an. Da in $\operatorname{int} D$ keine Extrema liegen, gilt:

Minimalstellen von $f$ auf $D$: $\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ und $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$, Minimum ist $-\frac{1}{2}$.

Maximalstellen von $f$ auf $D$: $\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ und $\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$, Maximum ist $\frac{9}{2}$.

**Aufgabe 3**

Sei $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$. Zeigen Sie, dass $M \setminus \{0\}$ eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist, aber nicht ganz $M$.

**Lösung:**
Die Menge $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$ ist gegeben durch

$$M = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R}).$$

Insbesondere ist $M \setminus \{0\}$ die disjunkte Vereinigung von 4 offenen Intervallen $U_i$:

$$M \setminus \{0\} = ((-\infty,0) \times \{0\}) \cup ((0,\infty) \times \{0\}) \cup (\{0\} \times (-\infty,0)) \cup (\{0\} \times (0,\infty)).$$

Jeder Punkt $p \in M \setminus \{0\}$ liegt also in genau einem $U_i$, und da $(0,\infty)$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist, gilt dies natürlich auch für die $U_i$ per Definition. Genauso gilt dann auch, dass $M \setminus \{0\}$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist (verwende direkt die Definition des Begriffes der Untermannigfaltigkeit).

Noch zu zeigen: M ist keine Untermannigfaltigkeit. Dazu benutzen wir das Graphenkriterium. Angenommen $M$ ist eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann gibt es (hinreichend kleine) offene Intervalle $I$, $J$ um 0 sowie eine $C^1$ Abbildung $g : I \to J$ mit

$$\{(t, g(t)) : t \in I\} = M \cap (I \times J) = (I \times \{0\}) \cup (\{0\} \times J).$$

Dies liefert aber einen Widerspruch (sonst folgt $g(t) \equiv 0$ und $J = \{0\}$, aber $J \subset \mathbb{R}$ ist offene Umgebung von $\{0\}$). Analog läßt sich $M$ in einer Umgebung von 0 nicht als Graph über der $y$-Achse schreiben.

**Aufgabe 4**

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ eine stetig differenzierbare ebene Kurve, die wir uns in der $(x,z)$-Ebene des $\mathbb{R}^3$ mit Koordinaten $x, y, z$ vorstellen, d.h. $x(t) = \alpha_1(t)$, $z(t) = \alpha_2(t)$. Wir setzen außerdem voraus, dass die Kurve regulär ist, d.h. $\alpha'(t) \neq (0,0)$ für alle $t \in I$. Wird die Kurve um die $z$-Achse rotiert, so entsteht eine Fläche $M$.

Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung $F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $(t,\varphi) \mapsto F(t,\varphi)$, der Fläche $M$. Untersuchen Sie, unter welchen Voraussetzungen $F$ eine Immersion ist und die Fläche $M$ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$.

**Lösung:**
Eine Parameterdarstellung der entstehenden Fläche ist gegeben durch

$$F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad (t,\varphi) \mapsto F(t,\varphi) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t)\cos\varphi \\ \alpha_1(t)\sin\varphi \\ \alpha_2(t) \end{pmatrix}.$$

Für die Ableitung von $F$ ergibt sich

$$DF(t,\varphi) = \begin{pmatrix} \alpha_1'(t)\cos\varphi & -\alpha_1(t)\sin\varphi \\ \alpha_1'(t)\sin\varphi & \alpha_1(t)\cos\varphi \\ \alpha_2'(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Man sieht leicht, dass $DF(t,\varphi)$ genau dann Rang 2 hat, falls $\alpha_1(t) \neq 0$. Also ist $F$ genau dann eine Immersion, wenn $\alpha_1(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.

Wir geben eine *hinreichende* Bedingung, wann $M$ eine Untermannigfaltigkeit ist: Sei dazu $I$ beschränkt und $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ mit $\alpha_1(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Zusätzlich nehmen wir an, dass $\alpha$ injektiv ist und fortgesetzt werden kann zu einer injektiven Abbildung auf $\bar{I}$.

Sei nun $p \in M$. Wir wählen $(t,\varphi) \in I \times \mathbb{R}$ mit $F(t,\varphi) = p$. Da $F$ eine Immersion ist, gibt es eine Umgebung $\subset I \times \mathbb{R}$ von $(t,\varphi)$, so dass $F(U)$ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit ist. Die Voraussetzung der injektiven Fortsetzbarkeit von $\alpha$ auf $\bar{I}$ (siehe dazu auch weiter unten) impliziert, dass es eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^3$ von $p$ gibt mit $V \cap M = F(U)$. Dies impliziert, dass $M$ eine Untermannigfaltigkeit ist (konstruiere lokale Plättungen).

Wir möchten diese Diskussion abschließen mit weiteren Überlegungen zu hinreichenden und notwendigen Bedingungen für das Vorliegen einer Untermannigfaltigkeit:

- Ist $\alpha$ nicht injektiv auf $I$, so ist $M$ nicht zwangsläufig eine Untermannigfaltigkeit, beispielsweise dann nicht, wenn das Bild von $\alpha$ aussieht wie die Zahl 8.
- Ist $\alpha$ zwar injektiv auf $I$, aber nicht injektiv fortsetzbar auf $\bar{I}$, so muss $M$ nicht zwangsläufig eine Untermannigfaltigkeit sein, beispielsweise dann nicht, wenn das Bild von $\alpha$ aussieht wie die Zahl 6.
- Ist $I$ nicht beschränkt, so muss $M$ nicht zwangsläufig eine Untermannigfaltigkeit sein. Ist beispielsweise $I = \mathbb{R}$, dann ist $I = \bar{I}$ und das Bild von $\alpha$ kann wiederum aussehen wie die Zahl 6, selbst dann, wenn $\alpha$ auf $\bar{I}$ injektiv ist.
- Ist $\alpha$ nicht injektiv auf $I$, so kann $M$ dennoch eine Untermannigfaltigkeit sein, beispielsweise wenn $\alpha$ einen zweimal durchlaufenen Kreis parametrisiert.
- Ist $F$ keine Immersion, so muss $M$ nicht zwangsläufig eine Untermannigfaltigkeit sein, beispielsweise dann nicht, wenn $\alpha$ eine Gerade in der $(x,z)$-Ebene durch den Ursprung parametrisiert, die nicht gleich der $x$- oder $z$-Achse ist. (Ist die Gerade die $x$- bzw. $z$-Achse, so erhält man eine 2- beziehungsweise 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit.)
- Ist $F$ keine Immersion, so kann $M$ dennoch eine Untermannigfaltigkeit sein, beispielsweise wenn $\alpha$ einen Kreis um den Ursprung in der $(x,z)$-Ebene parametrisiert (siehe auch das Beispiel der $x$-Achse im vorigen Punkt).

## Aufgabe 5

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} (xy + y^2)\, d(x,y)$

b) $$\iint\limits_{[-1,0]\times[0,2]} \cosh(2x+y)\, d(x,y)$$

**Lösung:**
Der Integrand ist jeweils eine stetige Funktion; wir können daher die Integrale berechnen wie folgt:

a) Es gilt

$$\begin{aligned}\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} (xy+y^2)\, d(x,y) &= \int_0^1 \int_0^1 (xy+y^2)\, dy\, dx = \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}xy^2 + \tfrac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^1 dx \\ &= \int_0^1 \left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}\right) dx = \left[\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{3}x\right]_0^1 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{7}{12}\,.\end{aligned}$$

b) Diesmal ergibt sich

$$\begin{aligned}\iint\limits_{[-1,0]\times[0,2]} \cosh(2x+y)\, d(x,y) &= \int_{-1}^0 \int_0^2 \cosh(2x+y)\, dy\, dx = \int_{-1}^0 \big[\sinh(2x+y)\big]_{y=0}^2 dx \\ &= \int_{-1}^0 \big(\sinh(2x+2) - \sinh(2x)\big)\, dx = \left[\tfrac{1}{2}\cosh(2x+2) - \tfrac{1}{2}\cosh(2x)\right]_{-1}^0 \\ &= \big(\tfrac{1}{2}\cosh 2 - \tfrac{1}{2}\cosh 0\big) - \big(\tfrac{1}{2}\cosh 0 - \tfrac{1}{2}\cosh(-2)\big) = \cosh 2 - 1 = \tfrac{1}{2}(e^2 + e^{-2}) - 1\,.\end{aligned}$$

## Aufgabe 6

Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Fubini die folgenden Integrale:

a) $$\int_Q y\sin(xy)\, d\mu, \qquad Q = [0,1]\times[0,\pi/2],$$

b) $$\int_Q \frac{x^2 z^3}{1+y^2}\, d\mu, \qquad Q = [0,1]\times[0,1]\times[0,1],$$

c) $$\int_Q \sin(x+y+z)\, d\mu, \qquad Q = [0,\pi]\times[0,\pi]\times[0,\pi].$$

**Lösung:**

a) $\int_0^{\pi/2}\int_0^1 y\sin(xy)\, dxdy = \int_0^{\pi/2}[-\cos(xy)]_0^1\, dy = \int_0^{\pi/2}(1-\cos y)\, dy$
$= [y - \sin y]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1.$

b) $\int_0^1 x^2\, dx \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} \int_0^1 z^3\, dz = \frac{1}{3}\arctan(1)\frac{1}{4} = \frac{\pi}{48}.$

c) $\int_0^\pi\int_0^\pi\int_0^\pi \sin(x+y+z)\, dzdydx = 2\int_0^\pi\int_0^\pi \cos(x+y)\, dydx = -4\int_0^\pi \sin x\, dx = -8$, wobei $\cos(x+y+\pi) = -\cos(x+y)$ und $\sin(x+\pi) = -\sin x$ verwendet wurde.