Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

SS 2013
20.05.2013

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

6. Übungsblatt

Aufgabe 1

Skizzieren Sie die Integrationsbereiche der folgenden Integrale, vertauschen Sie jeweils die Integrationsreihenfolge und berechnen Sie den Wert der Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{x^2}\, dx \right) dy$

b) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_y^{y^2+1} x^2 y\, dx \right) dy$

Aufgabe 2

Es sei D das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0), (1,0), (0,1)$. Das Vektorfeld $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + xy \\ x^2 y - y^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\displaystyle\int_{\partial D} F \cdot \vec{dx}$ zunächst direkt und anschließend mit dem Satz von Stokes (wobei ∂D im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen werde).

Aufgabe 3

Berechnen Sie unter Verwendung des Satzes von Stokes

$$\int_G (x^2 + y)\, d\mu\,, \qquad \text{wobei } G := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \right\}.$$

Aufgabe 4

Die beschränkte Menge $B \subset \mathbb{R}^3$ sei durch die Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und $x + y + 2z = 1$ begrenzt. Berechnen Sie das Integral $\int_B \sin z\, d\mu$.

Aufgabe 5

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränkter Normalbereich der Klasse C^1. Zeigen Sie:

$$\mu(\Omega) = -\int_{\partial\Omega} y\,dx = \int_{\partial\Omega} x\,dy = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} (x\,dy - y\,dx).$$

Berechnen Sie damit anschließend $\mu(B_1(0))$.