Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2013
Institut für Analysis 20.05.2013
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

6. Übungsblatt

Aufgabe 1

Skizzieren Sie die Integrationsbereiche der folgenden Integrale, vertauschen Sie jeweils die Integrationsreihenfolge und berechnen Sie den Wert der Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{x^2}\, dx \right) dy$

b) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_y^{y^2+1} x^2 y\, dx \right) dy$

Lösung:

a) Für den Integrationsbereich B gilt:

$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \in [0,1], x \in [y,1]\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in [0,1], y \in [0,x]\}$$

Da $f(x,y) = e^{x^2}$ stetig auf B ist, folgt:

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^x e^{x^2}\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^x dy\, e^{x^2}\, dx = \int_0^1 x e^{x^2}\, dx = \left[\tfrac{1}{2} e^{x^2}\right]_0^1 = \tfrac{e-1}{2}\,.$$

Bemerkung: Hier ist das innere Integral $\int_y^1 e^{x^2}\, dx$ nicht explizit berechenbar. Für die Bestimmung eines iterierten Integrals kann also die Integrationsreihenfolge wesentlich sein.

b) Für den Integrationsbereich B gilt:

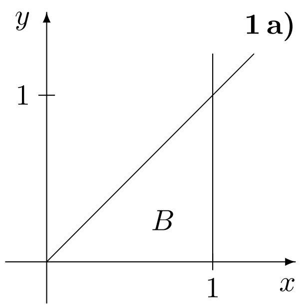
$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \in [0,1], x \in [y, y^2+1]\} = B_1 \cup B_2,$$

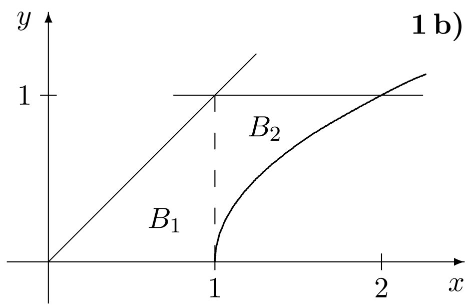
wobei

$$\begin{aligned} B_1 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \in [0,1], x \in [y,1]\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in [0,1], y \in [0,x]\}, \\ B_2 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \in [0,1], x \in [1, y^2+1]\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in [1,2], y \in [\sqrt{x-1}, 1]\}. \end{aligned}$$

Da $f(x,y) = x^2y$ stetig auf B ist, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_y^{y^2+1} x^2y\,dx\,dy &= \int\limits_{B_1} x^2y\,d\mu + \int\limits_{B_2} x^2y\,d\mu \\
&= \int_0^1 \int_0^x x^2y\,dy\,dx + \int_1^2 \int_{\sqrt{x-1}}^1 x^2y\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}x^2y^2\right]_{y=0}^{x} dx + \int_1^2 \left[\tfrac{1}{2}x^2y^2\right]_{y=\sqrt{x-1}}^{1} dx \\
&= \int_0^1 \tfrac{1}{2}x^4\,dx + \int_1^2 \left(\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x^2(x-1)\right) dx \\
&= \left[\tfrac{1}{10}x^5\right]_{x=0}^{1} + \left[-\tfrac{1}{8}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3\right]_{x=1}^{2} = \tfrac{1}{10} + \left(-2 + \tfrac{8}{3} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{67}{120}\,.
\end{aligned}$$





Aufgabe 2

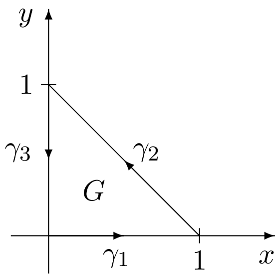
Es sei D das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. Das Vektorfeld $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + xy \\ x^2y - y^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\int_{\partial D} F \cdot \vec{dx}$ zunächst direkt und anschließend mit dem Satz von Stokes (wobei ∂D im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen werde).

Lösung:

Zunächst berechnen wir $\int_\gamma F \cdot \vec{dx}$ direkt mittels der Definition des Kurvenintegrals:



Definiere die regulären Kurven $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\gamma_1(t) = (t,0)\,, \qquad \gamma_2(t) = (1-t,t)\,, \qquad \gamma_3(t) = (0,1-t)\,.$$

Dann gilt $\gamma_1(1) = (1,0) = \gamma_2(0)$, $\gamma_2(1) = (0,1) = \gamma_3(0)$ sowie $\gamma_3(1) = (0,0) = \gamma_1(0)$. Da der positiv durchlaufene Rand des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$ durch $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ gegeben ist, erhält man

$$\int_\gamma F \cdot \vec{dx} = \int_{\gamma_1} F \cdot \vec{dx} + \int_{\gamma_2} F \cdot \vec{dx} + \int_{\gamma_3} F \cdot \vec{dx}\,.$$

Für die drei Kurvenintegrale auf der rechten Seite ergibt sich

$$\int_{\gamma_1} F \cdot \vec{dx} = \int_0^1 F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1{}'(t)\,dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 + t \cdot 0 \\ t^2 \cdot 0 - 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,dt = \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}\,,$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} F \cdot \vec{dx} &= \int_0^1 \begin{pmatrix} (1-t)^2 + (1-t)t \\ (1-t)^2 t - t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\,dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 1-t \\ t - 3t^2 + t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\,dt \\ &= \int_0^1 t^3 - 3t^2 + 2t - 1\,dt = \Big[\frac{1}{4}\,t^4 - t^3 + t^2 - t\Big]_0^1 = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

und

$$\int_{\gamma_3} F \cdot \vec{dx} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 + 0 \cdot (1-t) \\ 0 \cdot (1-t) - (1-t)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\,dt = \int_0^1 (1-t)^2\,dt = \Big[-\frac{1}{3}\,(1-t)^3\Big]_0^1 = \frac{1}{3}\,.$$

Zusammen folgt

$$\int_\gamma F \cdot \vec{dx} = \frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}\,.$$

Unter Verwendung des Satzes von Stokes in der Ebene lässt sich das Kurvenintegral folgendermaßen ausrechnen:

$G \subset \mathbb{R}^2$ sei das Innere des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. Dann ist G ein beschränktes Gebiet. Es seien $F_1(x,y) := x^2 + xy$ sowie $F_2(x,y) := x^2 y - y^2$ gesetzt. Offenbar ist $F = (F_1, F_2)$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar und der Rand ∂G, parametrisiert durch γ, erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Stokes. Dieser liefert

$$\int_\gamma F \cdot \vec{dx} = \int_G \big(\partial_1 F_2(x,y) - \partial_2 F_1(x,y)\big)\,d\mu = \int_G (2xy - x)\,d\mu\,.$$

Da der Integrand stetig ist, gilt

$$\begin{aligned}
\int\limits_G (2xy - x)\, d\mu &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (2xy - x)\, dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \big[xy^2 - xy\big]_{y=0}^{1-x}\, dx = \int_0^1 \big(x(1-x)^2 - x(1-x)\big)\, dx \\
&= \int_0^1 \big(x^3 - x^2\big)\, dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Berechnen Sie unter Verwendung des Satzes von Stokes

$$\int\limits_G (x^2 + y)\, d\mu\,, \qquad \text{wobei } G := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\big\}\,.$$

Lösung:

Setzen wir $F(x,y) := (F_1(x,y), F_2(x,y))$ mit $F_1(x,y) := -x^2 y$ und $F_2(x,y) := xy$, dann ist F auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar und es gilt $\partial_1 F_2(x,y) - \partial_2 F_1(x,y) = y + x^2$. Der Satz von Stokes liefert

$$\int\limits_G (x^2 + y)\, d\mu = \int\limits_G \big(\partial_1 F_2(x,y) - \partial_2 F_1(x,y)\big)\, d\mu = \int_{\partial G} F \cdot d\vec{x}\,.$$

Der positiv orientierte Rand ∂G der offenen Einheitskreisscheibe G wird parametrisiert durch die reguläre Kurve $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ mit $0 \le t \le 2\pi$. Folglich ergibt sich

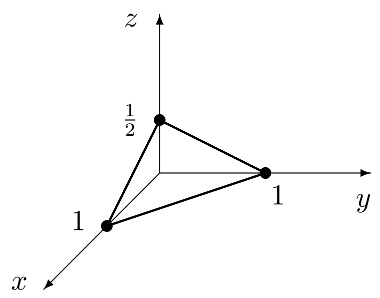
$$\begin{aligned}
\int\limits_G (x^2 + y)\, d\mu &= \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\cos^2 t\, \sin t \\ \cos t\, \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \big(\cos^2 t\, \sin^2 t + \sin t \cos^2 t\big)\, dt \overset{(*)}{=} \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{4} \sin^2(2t)\, dt + \int_0^{2\pi} \sin t \cos^2 t\, dt \\
&= \tfrac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2(2t)\, dt - \big[\tfrac{1}{3} \cos^3 t\big]_{t=0}^{2\pi} \overset{(**)}{=} \tfrac{1}{8} \int_0^{4\pi} \sin^2(u)\, du \overset{(***)}{=} \tfrac{1}{8} \cdot 2\pi = \tfrac{\pi}{4}\,.
\end{aligned}$$

Hierbei verwendeten wir in $(*)$ das Additionstheorem des Sinus: $2 \sin t\, \cos t = \sin(2t)$, in $(**)$ die Substitution $u = 2t$ und in $(***)$ die Identität $\int_0^{2\pi} \sin^2(u)\, du = \pi$. Letztere kann man z.B. mit Hilfe von partieller Integration zeigen.

Aufgabe 4

Die beschränkte Menge $B \subset \mathbb{R}^3$ sei durch die Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und $x + y + 2z = 1$ begrenzt. Berechnen Sie das Integral $\int\limits_B \sin z\, d\mu$.

Lösung:



Die Menge B wird von den Koordinatenebenen und von der Ebene durch die drei Punkte $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,\frac{1}{2})$ begrenzt (siehe Skizze). Damit ist $(x,y,z) \in B$ äquivalent zu

$$0 \le x \le 1\,, \quad 0 \le y \le 1-x\,, \quad 0 \le z \le \tfrac{1}{2}(1-x-y)\,.$$

Bei B handelt es sich also um

$$\begin{aligned} &B = \left\{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ (x,y) \in B_0\,,\ 0 \le z \le \tfrac{1}{2}(1-x-y) \,\right\},\\ &\text{wobei}\quad B_0 := \left\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le 1-x \,\right\}. \end{aligned}$$

Da $(x,y,z) \mapsto \sin z$ auf $\mathbb{R}^3$ stetig ist, ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_B \sin z\, d\mu &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{(1-x-y)/2} \sin z\, dz\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \big[-\cos z\big]_{z=0}^{(1-x-y)/2}\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \Big(-\cos\big(\tfrac{1-x-y}{2}\big) + 1\Big)\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \big[2\sin\big(\tfrac{1-x-y}{2}\big) + y\big]_{y=0}^{1-x}\, dx = \int_0^1 \Big(1 - x - 2\sin\big(\tfrac{1-x}{2}\big)\Big)\, dx \\ &= \big[x - \tfrac{1}{2}x^2 - 4\cos\big(\tfrac{1-x}{2}\big)\big]_{x=0}^1 = \big(1 - \tfrac{1}{2} - 4\cos 0\big) + 4\cos(\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{7}{2} + 4\cos(\tfrac{1}{2})\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 5

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränkter Normalbereich der Klasse C^1. Zeigen Sie:

$$\mu(\Omega) = -\int_{\partial\Omega} y\, dx = \int_{\partial\Omega} x\, dy = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} (x\, dy - y\, dx).$$

Berechnen Sie damit anschließend $\mu(B_1(0))$.

Lösung:
Wir wählen zunächst $g(x,y) = -y$, $h(x,y) = 0$. Der Satz von Green liefert

$$\mu(\Omega) = \int_\Omega \left(-\frac{\partial g}{\partial y}\right)\, d\mu = \int_{\partial\Omega} g\, dx = -\int_{\partial\Omega} y\, dx.$$

Analog ergibt die Wahl $g(x,y) = 0$, $h(x,y) = x$ die Formel

$$\mu(\Omega) = \int_\Omega \frac{\partial h}{\partial x}\, d\mu = \int_{\partial\Omega} h\, dy = \int_{\partial\Omega} x\, dy.$$

Die Kombination dieser Gleichungen liefert

$$\mu(\Omega) = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} (x\, dy - y\, dx).$$

Nun zur Berechnung von $\mu(B_1(0))$: Wir parametrisieren den Rand von $\Omega = B_1(0)$ durch $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)^t$, $0 \le t \le 2\pi$. Dies führt auf

$$\begin{aligned}
\mu(B_1(0)) &= \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} (x\, dy - y\, dx) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\cos t, -\sin t)\begin{pmatrix}\cos t \\ -\sin t\end{pmatrix} dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1\, dt \\
&= \pi.
\end{aligned}$$