Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

SS 2013
27.05.2013

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

7. Übungsblatt

Aufgabe 1

Die *räumlichen Polarkoordinaten* sind gegeben durch $\Phi : \mathbb{R}_+ \times [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(r,\vartheta,\varphi) := (r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta)$.

a) Zeigen Sie: $|\det D\Phi(r,\vartheta,\varphi)| = r^2 \sin\vartheta$.

b) Berechnen Sie mithilfe räumlicher Polarkoordinaten und Teil a) das Volumen der Kugel $B_r(0) \subset \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 2

Es bezeichne $R \subset \mathbb{R}^2$ die Menge aller $(x,y) \in [-1,1] \times \mathbb{R}$ mit $0 \le y \le \sqrt{4-4x}$ für $x \ge 0$, bzw. $0 \le y \le \sqrt{4+4x}$ für $x \le 0$.

a) Sei $Q = [0,1] \times [0,1]$ und $\phi : Q \to \mathbb{R}^2$, $\phi(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv)$. Zeigen Sie, dass $\phi(Q) = R$.

b) Berechnen Sie mit Teil a) das Integral $\int_R y \, d\mu$.

Aufgabe 3

Berechnen Sie das Integral $\int_R e^{(x+y)/(x-y)} \, d\mu$, wobei $R \subset \mathbb{R}^2$ das Trapez mit den Eckpunkten $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,-2)$, $(0,-1)$ ist.

Aufgabe 4

a) Sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^2$, und $f \in C^1(\overline{\Omega})$. Sei ferner $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \Omega,\ z = f(x,y)\}$. Zeigen Sie, dass sich der Flächeninhalt von S berechnet durch

$$\mu(S) = \int_\Omega \sqrt{1 + (\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2} \, d\mu.$$

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt desjenigen Teils des Paraboloids $z = x^2 + y^2$, der zwischen den Ebenen $z = 0$ und $z = 4$ liegt.

c) Wie groß ist der Flächeninhalt desjenigen Teils des hyperbolischen Paraboloids $z = xy$, der über dem Viertelkreis $x^2 + y^2 \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ liegt?

Aufgabe 5

a) Berechnen Sie für die Menge

$$B = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \le z \le 1\,, x^2+y^2 \le (1-z)^2\big\}$$

das Integral

$$\int\limits_B (x^2+y^2)^2\, e^{2(1-z)^7}\, d\mu\,.$$

b) Sei $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ \|(x,y,z)\| \le 2\}$. Eine kugelförmige Gasansammlung besitze die Massendichte

$$\rho(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2+y^2+z^2} & \text{für } 0 \le \sqrt{x^2+y^2+z^2} \le 1\,, \\ 2 & \text{für } 1 < \sqrt{x^2+y^2+z^2} \le 2\,. \end{cases}$$

Berechnen Sie die gesamte Masse

$$\int\limits_B \rho(x,y,z)\, d\mu\,.$$

Aufgabe 6

Berechnen Sie den Flächeninhalt von $\mathcal{F} = \big\{(x,y,x^2+y^2) :\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \le 1\big\}$.