Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2013
Institut für Analysis 27.05.2013
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

7. Übungsblatt

Aufgabe 1

Die *räumlichen Polarkoordinaten* sind gegeben durch $\Phi : \mathbb{R}_+ \times [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(r,\vartheta,\varphi) := (r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta)$.

a) Zeigen Sie: $|\det D\Phi(r,\vartheta,\varphi)| = r^2\sin\vartheta$.

b) Berechnen Sie mithilfe räumlicher Polarkoordinaten und Teil a) das Volumen der Kugel $B_r(0) \subset \mathbb{R}^3$.

Lösung:

a) Man berechnet

$$D\Phi(r,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}.$$

Unter Verwendung von $\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta = 1$ und $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ führt dies auf $\det D\Phi(r,\vartheta,\varphi) = r^2\sin\vartheta$. Wegen $\sin\vartheta \geq 0$ für $\vartheta \in [0,\pi]$ erhalten wir schließlich $|\det D\Phi(r,\vartheta,\varphi)| = r^2\sin\vartheta$.

Anmerkung: Möchte man die Ableitung (und ihre Determinante) nur auf offenen Mengen berechnen, so reicht es auch, die Einschränkung von Φ auf $(0,\infty) \times (0,\pi) \times (0,2\pi)$ zu betrachten.

b) Wir betrachten die Einschränkung von Φ auf $(0,r) \times (0,\pi) \times (0,2\pi)$. Dies liefert eine Abbildung $\Phi : (0,r) \times (0,\pi) \times (0,2\pi) \to B_r(0) \backslash (\mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R})$ (wobei $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$). Da $\mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R}$ (und erst recht $\mathbb{R}_+ \times \{0\} \times (-r,r)$) eine Nullmenge ist, gilt $\mu(B_r(0)) = \mu(B_r(0) \backslash (\mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R}))$; dabei bezeichnet μ das 3-dimensionale Volumen.

Mit Teil a) liefert die Transformationsformel

$$\begin{aligned} \mu(B_r(0)) &= \int_{B_r(0)} dx\,dy\,dz \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} r'^2 \sin\vartheta\, dr' d\vartheta\, d\varphi \\ &= \left(\int_0^r r'^2\,dr'\right)\left(\int_0^{\pi}\sin\vartheta\,d\vartheta\right)\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) \\ &= \frac{r^3}{3}\cdot 2\cdot 2\pi \\ &= \frac{4\pi}{3}r^3. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Es bezeichne $R \subset \mathbb{R}^2$ die Menge aller $(x,y) \in [-1,1] \times \mathbb{R}$ mit $0 \le y \le \sqrt{4-4x}$ für $x \ge 0$, bzw. $0 \le y \le \sqrt{4+4x}$ für $x \le 0$.

a) Sei $Q = [0,1] \times [0,1]$ und $\phi : Q \to \mathbb{R}^2$, $\phi(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv)$. Zeigen Sie, dass $\phi(Q) = R$.

b) Berechnen Sie mit Teil a) das Integral $\int_R y \, d\mu$.

Lösung:

a) Indem man die Gleichungen $0 \le y \le \sqrt{4-4x}$ und $0 \le y \le \sqrt{4+4x}$ nach x auflöst, folgert man, dass R von den Parabeln $x = 1 - \frac{y^2}{4}$ und $x = \frac{y^2}{4} - 1$ (jeweils mit $0 \le y \le 2$), sowie dem Segment von $(-1,0)$ nach $(1,0)$ berandet wird.

Zu festem $y_0 \in (0,2]$ sei $M = \{(x,y) \in \phi(Q) : y = y_0\}$. Für (u,v) gelte $\phi(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv) = (x, y_0)$. Wegen $v \le 1$ ist dann $u = \frac{y_0}{2v} \ge \frac{y_0}{2}$ und für jedes $u \in [\frac{y_0}{2}, 1]$ gibt es genau ein $v \in (0,1]$ mit $\phi(u,v) = (u^2 - v^2, y_0)$. Mit $v = \frac{y_0}{2u}$ erhalten wir $\phi(u,v) = (u^2 - \frac{y_0^2}{4u^2}, y_0)$. Da $u \mapsto u^2 - \frac{y_0^2}{4u^2}$ streng monoton steigend und stetig ist, ist

$$M = \left\{ \left(u^2 - \frac{y_0^2}{4u^2}, y_0 \right) : \frac{y_0}{2} \le u \le 1 \right\} = \left\{ (x, y_0) : \frac{y_0^2}{4} - 1 \le x \le 1 - \frac{y_0^2}{4} \right\}.$$

Insbesondere ist $\phi((0,1] \times (0,1]) = \{(x,y) \in R : y > 0\}$.

Für $u \in [0,1]$, $v = 0$ ist $\phi(u,v) = (u^2, 0)$; also wird $[0,1] \times \{0\}$ auf $[0,1] \times \{0\}$ abgebildet. Für $u = 0$, $v \in [0,1]$ ist $\phi(u,v) = (-v^2, 0)$; also wird $\{0\} \times [0,1]$ auf $[-1,0] \times \{0\}$ abgebildet. Schließlich folgt $\phi(Q) = R$.

Obige Überlegungen zeigen auch (in Vorbereitung auf Teil b)):

- ϕ ist injektiv: Ist $u \ne 0$, $v \ne 0$, und gilt $\phi(u,v) = (x_0, y_0)$, so ist $x_0 = u^2 - \frac{y_0^2}{4u^2}$, also u aus Monotoniegründen eindeutig bestimmt. Wegen $v = \frac{y_0}{2u}$ ist damit auch v eindeutig bestimmt. Man folgert leicht, dass ϕ auf ganz Q injektiv ist.

- $\phi(\text{int}\, Q) = \text{int}\, R$, wobei int das Innere einer Menge bezeichnet.

b) Wir berechnen

$$D\phi(u,v) = \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{pmatrix}$$

Insbesondere ist $\det D\phi(u,v) = 4u^2 + 4v^2 > 0$ für $(u,v) \in (0,1) \times (0,1)$. Mit Teil a) ist damit $\phi : (0,1) \times (0,1) \to \text{int}\, R$ ein Diffeomorphismus. Da ∂R eine Nullmenge ist, liefert der Transformationssatz

$$\begin{aligned}
\int_R y\,d\mu &= \int_Q 2uv\,|\det D\phi(u,v)|\,d\mu \\
&= \int_0^1\int_0^1 (2uv)4(u^2+v^2)\,du\,dv \\
&= 8\int_0^1\int_0^1 (u^3v+uv^3)\,du\,dv \\
&= 8\int_0^1 \left[\frac{1}{4}u^4v+\frac{1}{2}u^2v^3\right]_{u=0}^{u=1} dv \\
&= \int_0^1 (2v+4v^3)\,dv \\
&= [v^2+v^4]_0^1 \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Berechnen Sie das Integral $\int_R e^{(x+y)/(x-y)}\,d\mu$, wobei $R\subset\mathbb{R}^2$ das Trapez mit den Eckpunkten $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,-2)$, $(0,-1)$ ist.

Lösung:
Sei $S\subset\mathbb{R}^2$ das Trapez mit den Eckpunkten $(1,1)$, $(2,2)$, $(-2,2)$ und $(-1,1)$. Sei $\phi: S\to\mathbb{R}^2$, $\phi(u,v)=\left(\frac{1}{2}(u+v),\frac{1}{2}(u-v)\right)=(x,y)$. Insbesondere ist damit $u=x+y$, $v=x-y$, womit unter Verwendung des Transformationssatzes (siehe unten) die Auswertung des Integrals einfach wird. Es gilt

$$S=\bigcup_{1\le v\le 2}\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : u\in[-v,v]\},\quad R=\bigcup_{1\le z\le 2}\{(x,y)\in\mathbb{R}_{\ge 0}\times\mathbb{R}_{\le 0} : x-y=z\}.$$

Wegen $\frac{1}{2}(u+v)\ge 0$ und $\frac{1}{2}(u-v)\le 0$ für $u\in[-v,v]$, und da $v=x-y$ für $\phi(u,v)=(x,y)$, bildet ϕ von S nach R ab. Ferner sieht man, dass durch $\phi^{-1}: R\to S$, $\phi^{-1}(x,y)=(x+y,x-y)$, die Umkehrabbildung von ϕ gegeben ist (prüfe, dass ϕ^{-1} von R nach S abbildet, und dass $\phi\circ\phi^{-1}=\mathrm{Id}_R$, $\phi^{-1}\circ\phi=\mathrm{Id}_S$). Insbesondere ist $\phi: S\to R$ bijektiv.

Es gilt

$$D\phi(u,v)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

und $\det D\phi(u,v)=-\frac{1}{2}$. Damit ist ϕ sogar ein Diffeomorphismus von $\operatorname{int} S$ nach $\operatorname{int} R$. Wie in Aufgabe 2 b) folgt mit dem Transformationssatz

$$\begin{aligned}
\int_R e^{(x+y)/(x-y)}\,d\mu &= \int_S e^{u/v}\,|\det D\phi(u,v)|\,d\mu \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2\int_{-v}^{v} e^{u/v}\,du\,dv \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2 [ve^{u/v}]_{u=-v}^{u=v}\,dv \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2 (e-e^{-1})v\,dv \\
&= \frac{3}{4}(e-e^{-1}).
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) Sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^2$, und $f \in C^1(\overline{\Omega})$. Sei ferner $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \Omega,\ z = f(x,y)\}$. Zeigen Sie, dass sich der Flächeninhalt von S berechnet durch

$$\mu(S) = \int_\Omega \sqrt{1 + (\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2}\,d\mu.$$

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt desjenigen Teils des Paraboloids $z = x^2 + y^2$, der zwischen den Ebenen $z = 0$ und $z = 4$ liegt.

c) Wie groß ist der Flächeninhalt desjenigen Teils des hyperbolischen Paraboloids $z = xy$, der über dem Viertelkreis $x^2 + y^2 \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ liegt?

Lösung:

a) Die Fläche S wird parametrisiert durch die Abbildung $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\phi(x,y) = (x,y,f(x,y))$. Damit ist $\partial_x\phi = (1,0,\partial_x f)$, $\partial_y\phi = (0,1,\partial_y f)$ und

$$(\partial_x\phi) \times (\partial_y\phi) = (-\partial_x f, -\partial_y f, 1).$$

Damit gilt nach Vorlesung

$$\begin{aligned}
\mu(S) &= \int_\Omega \|(\partial_x\phi) \times (\partial_y\phi)\|_2\,d\mu \\
&= \int_\Omega \sqrt{1 + (\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2}\,d\mu.
\end{aligned}$$

b) Die Fläche wird parametrisiert durch die Abbildung $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\phi(x,y) = (x,y,x^2+y^2)$, wobei

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 4\} = B_2(0) \subset \mathbb{R}^2.$$

Der Flächeninhalt A berechnet sich dann mit Teil a) und ebenen Polarkoordinaten durch

$$\begin{aligned} A &= \int_\Omega \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\, d\mu \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{1+4r^2} r\, dr d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^2 r\sqrt{1+4r^2}\, dr \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{12}(1+4r^2)^{3/2}\right]_0^2 \\ &= \frac{\pi}{6}(17^{3/2}-1). \end{aligned}$$

c) Mit $f(x,y) = xy$ und $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ berechnet man wie in Teil a) und b) und unter Verwendung ebener Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} A &= \int_\Omega \sqrt{1+x^2+y^2}\, d\mu \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^1 r\sqrt{1+r^2}\, dr \\ &= \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{3}(1+r^2)^{3/2}\right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{6}(2^{3/2}-1). \end{aligned}$$

Aufgabe 5

a) Berechnen Sie für die Menge

$$B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \leq z \leq 1\,, x^2+y^2 \leq (1-z)^2\right\}$$

das Integral

$$\int\limits_B (x^2+y^2)^2\, e^{2(1-z)^7}\, d\mu\,.$$

b) Sei $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ \|(x,y,z)\| \leq 2\}$. Eine kugelförmige Gasansammlung besitze die Massendichte

$$\rho(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2+y^2+z^2} & \text{für } 0 \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq 1\,, \\ 2 & \text{für } 1 < \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq 2\,. \end{cases}$$

Berechnen Sie die gesamte Masse

$$\int\limits_B \rho(x,y,z)\, d\mu\,.$$

Lösung:

a) Wir greifen auf Zylinderkoordinaten zurück:

$$x = r\cos\phi\,, \qquad y = r\sin\phi\,, \qquad z = z\,, \qquad d(x,y,z) = r\,d(r,\phi,z)\,.$$

Für $(x,y,z) \in B$ gilt $0 \le z \le 1$, und die zweite B definierende Ungleichung führt auf die Bedingung $r^2 \le (1-z)^2$. Die Menge B ist also charakterisiert durch

$$0 \le z \le 1\,, \qquad 0 \le \phi \le 2\pi\,, \qquad 0 \le r \le 1-z\,.$$

Die Transformationsformel liefert nun

$$\begin{aligned}\int_B (x^2+y^2)^2\, e^{2(1-z)^7}\, d\mu &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-z} (r^2)^2\, e^{2(1-z)^7}\, r\, dr\, d\phi\, dz \\ &= 2\pi \int_0^1 \int_0^{1-z} r^5 e^{2(1-z)^7}\, dr\, dz = 2\pi \int_0^1 \left[\tfrac{1}{6} r^6\right]_{r=0}^{1-z} e^{2(1-z)^7}\, dz \\ &= \int_0^1 \tfrac{1}{3}\pi(1-z)^6\, e^{2(1-z)^7}\, dz = \left[-\frac{\pi e^{2(1-z)^7}}{42}\right]_{z=0}^1 = \frac{\pi(e^2-1)}{42}\,.\end{aligned}$$

b) Definiere $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2+z^2 \le 1\}$ und $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; 1 < x^2+y^2+z^2 \le 2\}$. Dann gilt $B = K \cup S$ und $K \cap S = \emptyset$, und folglich

$$m := \int_B \rho(x,y,z)\, d\mu = \int_K \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}\, d\mu + \int_S 2\, d\mu.$$

Da $S = B(0,2)\backslash B(0,1)$, gilt $\mathrm{vol}(S) = \mathrm{vol}(B(2,0)) - \mathrm{vol}(B(0,1))$

$$\int_S 2\, d\mu = 2\left(\frac{4}{3}\pi 2^3 - \frac{4}{3}\pi\right) = \frac{56}{3}\pi.$$

Für das erste Integral benutzen wir Kugelkoordinaten:

$x = r\cos\phi\,\cos\vartheta, \quad y = r\sin\phi\,\cos\vartheta, \quad z = r\sin\vartheta \qquad$ mit $r \in [0,1]$, $\phi \in [0,2\pi]$, $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Die Transformationsformel liefert

$$\begin{aligned}\int_K \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}\, d\mu &= \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \rho\big(f(r,\theta,\phi)\big)\, |J_f\big(f(r,\theta,\phi)\big)|\, d\phi\, d\vartheta\, dr \\ &= \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+r^2}\, r^2\cos\vartheta\, d\phi\, d\vartheta\, dr \\ &= 2\pi \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{1+r^2}\, \cos\vartheta\, d\vartheta\, dr \\ &= 4\pi \int_0^1 \frac{r^2}{1+r^2}\, dr = 4\pi \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+r^2}\right) dr \\ &= 4\pi\big(1 - [\arctan r]_{r=0}^1\big) = 4\pi\big(1 - (\tfrac{\pi}{4} - 0)\big) = 4\pi - \pi^2.\end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich also

$$m = \frac{56}{3}\pi + 4\pi - \pi^2 = \frac{68}{3}\pi - \pi^2.$$

Aufgabe 6

Berechnen Sie den Flächeninhalt von $\mathcal{F} = \big\{(x, y, x^2 + y^2) : \ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\big\}$.

Lösung:
Es gilt $\mathcal{F} = \big\{(x, y, f(x, y)) : \ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\big\}$ mit $f(x, y) = x^2 + y^2$. Wir setzen $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Dann gilt für den Flächeninhalt A von $\mathcal{F}$ nach Aufgabe 4 a)

$$A = \int\limits_B \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, d\mu.$$

Mit Polarkoordinaten ergibt sich

$$A = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{4r^2 + 1}\, r\, d\phi\, dr = 2\pi \int\limits_0^1 \sqrt{4r^2 + 1}\, r\, dr = 2\pi \big[\tfrac{1}{12}\,(4r^2 + 1)^{3/2}\big]_0^1 = \tfrac{\pi}{6}(5^{3/2} - 1).$$