Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2013
Institut für Analysis 03.06.2013
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

8. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq 3\}$ und γ eine positiv orientierte Parametrisierung von ∂U. Für $(u,v) \in U$ definiere $\Phi(u,v) = (u, v, v^2 - u^2)$ und betrachte die Fläche

$$S = \big\{\Phi(u,v) \mid (u,v) \in U\big\},$$

deren Rand $\partial S = \Phi(\partial U)$ durch $\Phi \circ \gamma$ parametrisiert sei. Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$G(x,y,z) = \begin{pmatrix} z - 5y \\ 9x - 3z \\ y - 2x \end{pmatrix}$$

das Kurvenintegral $\int_{\partial S} G \cdot \vec{dx}$ unter Verwendung des Stokesschen Integralsatzes.

Lösung:
Die Fläche S liegt in Parameterdarstellung vor mit

$$\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ v^2 - u^2 \end{pmatrix}, \quad (u,v) \in U := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq 3\}.$$

Der Stokessche Integralsatz liefert

$$\int_{\partial S} G \cdot \vec{dx} = \int\limits_U \big(\text{rot } G\big)\big(\Phi(u,v)\big) \cdot \big(\partial_u \Phi(u,v) \times \partial_v \Phi(u,v)\big)\, d\mu.$$

Nun ist

$$\partial_u \Phi(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2u \end{pmatrix}, \quad \partial_v \Phi(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix}, \qquad \text{also} \qquad \partial_u \Phi(u,v) \times \partial_v \Phi(u,v) = \begin{pmatrix} 2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix},$$

und es gilt

$$\text{rot } G = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 G_3 - \partial_3 G_2 \\ \partial_3 G_1 - \partial_1 G_3 \\ \partial_1 G_2 - \partial_2 G_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - (-3) \\ 1 - (-2) \\ 9 - (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Folglich ergibt sich

$$\int_{\partial S} G \cdot \vec{dx} = \int\limits_U \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix} d\mu = \int\limits_U (8u - 6v + 14)\, d\mu;$$

und mit Polarkoordinaten (U ist die Kreisscheibe um $(0,0)$ mit Radius $\sqrt{3}$) erhält man unter Berücksichtigung von $\int_0^{2\pi} \cos\phi \, d\phi = \int_0^{2\pi} \sin\phi \, d\phi = 0$:

$$\int_{\partial S} G \cdot \vec{dx} = \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} (8r\cos\phi - 6r\sin\phi + 14)\, r \, d\phi \, dr = \int_0^{\sqrt{3}} 28\pi r \, dr$$
$$= 28\pi \left[\tfrac{1}{2} r^2\right]_{r=0}^{\sqrt{3}} = 28\pi \cdot \tfrac{3}{2} = 42\pi \, .$$

Aufgabe 2

Die Oberfläche von $Z := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, \, 0 \leq z \leq 1\right\}$ wird mit S bezeichnet und es sei

$$G(x,y,z) := \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 y \\ x^2 z \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie

$$\int\limits_S G \cdot n \, d\sigma \, ,$$

wobei n der Normaleneinheitsvektor ist, der ins Äußere des Zylinders Z weist, auf zwei verschiedene Arten, nämlich

a) mittels der Definition des Oberflächenintegrals;

b) unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes.

Lösung:

a) Die Oberfläche S des Zylinders Z besteht aus drei Teilen, nämlich aus der Bodenfläche S_1, der Mantelfläche S_2 und der oberen Deckfläche S_3.

Die Bodenfläche S_1 können wir durch die Parametrisierung $g(u,v) := (u\cos v, u\sin v, 0)$ mit $(u,v) \in U := [0,1] \times [0,2\pi]$ darstellen. Es gilt

$$\partial_u g(u,v) \times \partial_v g(u,v) = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -u\sin v \\ u\cos v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u\cos^2 v + u\sin^2 v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix} .$$

Es ergibt sich $n = (0,0,-1)$ als äußere Einheitsnormale. (Man teilt $\partial_u g(u,v) \times \partial_v g(u,v)$ durch die Norm $\|\partial_u g(u,v) \times \partial_v g(u,v)\|$ und wählt dann noch das Vorzeichen so, dass der Vektor nach außen weist.) Also ist $\int_{S_1} G \cdot n \, d\sigma = 0$, denn

$$\big(G(g(u,v))\big) \cdot \big(n(g(u,v))\big) = \begin{pmatrix} u^3 \cos^3 v \\ u^3 \cos^2 v \, \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \, .$$

Die Mantelfläche S_2 wird durch $g(u,v) := (\cos u, \sin u, v)$ mit $(u,v) \in U := [0,2\pi] \times [0,1]$ parametrisiert. Wir erhalten

$$\partial_u g(u,v) \times \partial_v g(u,v) = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist die äußere Einheitsnormale n an S_2. Wegen

$$\big(G(g(u,v))\big) \cdot \big(n(g(u,v))\big) = \begin{pmatrix} \cos^3 u \\ \cos^2 u \, \sin u \\ v \cos^2 u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} = \cos^4 u + \cos^2 u \, \sin^2 u = \cos^2 u$$

folgt

$$\int\limits_{S_2} G \cdot n \, d\sigma = \int\limits_U \cos^2 u \, \underbrace{\|\partial_u g(u,v) \times \partial_v g(u,v)\|}_{=\cos^2 u + \sin^2 u = 1} \, d\mu = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \cos^2 u \, dv \, du = \int_0^{2\pi} \cos^2 u \, du = \pi \,.$$

Es bleibt noch die Deckfläche S_3: Die Parametrisierung $g(u,v) := (u \cos v, u \sin v, 1)$ mit $(u,v) \in U := [0,1] \times [0,2\pi]$ liefert $\partial_u g(u,v) \times \partial_v g(u,v) = (0,0,u)$. Es ist $n = (0,0,1)$ und damit

$$\big(G(g(u,v))\big) \cdot \big(n(g(u,v))\big) = \begin{pmatrix} u^3 \cos^3 v \\ u^3 \cos^2 v \, \sin v \\ u^2 \cos^2 v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u^2 \cos^2 v \,.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int\limits_{S_3} G \cdot n \, d\sigma &= \int\limits_U u^2 \cos^2 v \, \underbrace{\|\partial_u g(u,v) \times \partial_v g(u,v)\|}_{=|u|=u, \text{ da } u \geq 0} \, d\mu = \int_0^1 \int_0^{2\pi} u^3 \cos^2 v \, dv \, du \\ &= \left(\int_0^1 u^3 \, du \right) \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 v \, dv \right) = \tfrac{1}{4}\pi \,. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\int\limits_S G \cdot n \, d\sigma = \sum_{k=1}^{3} \int\limits_{S_k} G \cdot n \, d\sigma = 0 + \pi + \tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{5}{4}\pi \,.$$

b) Nach dem Gaußschen Integralsatz im $\mathbb{R}^3$ ist

$$\int\limits_S G \cdot n \, d\sigma = \int\limits_Z \operatorname{div} G \, d\mu \,.$$

Nun gilt $(\operatorname{div} G)(x,y,z) = \partial_x(x^3) + \partial_y(x^2 y) + \partial_z(x^2 z) = 3x^2 + x^2 + x^2 = 5x^2$ und mit Zylinderkoordinaten $x = r\cos\phi$, $y = r \sin\phi$, $z = z$, wobei $r \in [0,1]$, $\phi \in [0,2\pi]$, $z \in$

$[0,1]$, folgt

$$\begin{aligned}\int_S G\cdot n\,d\sigma &= \int_Z 5x^2\,d\mu = \int_{[0,1]\times[0,2\pi]\times[0,1]} 5(r\cos\phi)^2\,r\,d\mu \\ &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^1 5r^3\cos^2\phi\,dz\,d\phi\,dr = \int_0^1\int_0^{2\pi} 5r^3\cos^2\phi\,d\phi\,dr \\ &= 5\left(\int_0^1 r^3\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\phi\,d\phi\right) = \tfrac{5}{4}\pi\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Gegeben seien der Kegel $K = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0\le z\le 2-\sqrt{x^2+y^2}\}$ sowie das Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $f(x,y,z)=(z,y,z+1)$. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes f durch die Oberfläche des Kegels K nach außen.

Lösung:
Sei S die Oberfläche des Kegels und n die Einheitsnormale auf S, die ins Äußere von K gerichtet ist. Der Fluss des Vektorfeldes f durch die Oberfläche S des Kegels K nach außen ist nach Vorlesung gegeben durch

$$\int_{\partial K} f\cdot n\,d\sigma.$$

Mit dem Satz von Gauß erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{\partial K} f\cdot n\,d\sigma &= \int_K \operatorname{div}\, K\,d\mu \\ &= \int_K 2\,d\mu.\end{aligned}$$

Wir verwenden Kegelkoordinaten $\Phi\ :\ (0,1)\times(0,2\pi)\times(0,2)\to\mathbb{R}^3$, $\phi(r,\varphi,z) = ((2-z)r\cos\varphi,(2-z)r\sin\varphi,z)^t$. Es gilt $|\det D\Phi(r,\varphi,z)| = (2-z)^2r$. Der Transformationssatz liefert

$$\begin{aligned}\int_{\partial K} f\cdot n\,d\sigma &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^2 2(2-z)^2r\,dz\,d\varphi\,dr \\ &= \int_0^1\int_0^{2\pi} 2r\left[-\frac{1}{3}(2-z)^3\right]_0^2 d\varphi\,dr \\ &= \int_0^1 \frac{32}{3}\pi r\,dr = \frac{16}{3}\pi.\end{aligned}$$

Alternative Lösung mittels direkter Berechnung:

Die Oberfläche S besteht aus dem Kegelmantel und dem Grundkreis. Wir parametrisieren zunächst den Kegelmantel

$$M := \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ z = 2-\sqrt{x^2+y^2},\ z\ge 0\right\}$$

durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ 2-r \end{pmatrix} =: g(r,\phi) \qquad \text{mit } (r,\phi) \in [0,2]\times[0,2\pi].$$

Dann ist

$$\partial_r g(r,\phi) \times \partial_\phi g(r,\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\phi \\ r\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ r \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor zeigt nach außen. Weiter gilt

$$\begin{aligned} f(g(r,\phi)) \cdot \big(\partial_r g(r,\phi) \times \partial_\phi g(r,\phi)\big) &= \begin{pmatrix} 2-r \\ r\sin\phi \\ 3-r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ r \end{pmatrix} = (2-r)r\cos\phi + r^2\sin^2\phi + (3-r)r \\ &= (2r-r^2)\cos\phi + r^2\sin^2\phi + (3r-r^2). \end{aligned}$$

Für den Fluss von f durch die Mantelfläche M nach außen erhält man

$$\begin{aligned} \int\limits_M f \cdot n\, d\sigma &= \int\limits_{[0,2]\times[0,2\pi]} f(g(r,\phi)) \cdot \frac{\partial_r g(r,\phi) \times \partial_\phi g(r,\phi)}{\|\partial_r g(r,\phi) \times \partial_\phi g(r,\phi)\|} \|\partial_r g(r,\phi) \times \partial_\phi g(r,\phi)\|\, d\mu \\ &= \int\limits_{[0,2]\times[0,2\pi]} f(g(r,\phi)) \cdot \big(\partial_r g(r,\phi) \times \partial_\phi g(r,\phi)\big)\, d\mu \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \big((2r-r^2)\cos\phi + r^2\sin^2\phi + (3r-r^2)\big)\, d\phi\, dr \\ &= \int_0^2 \big(\pi r^2 + (3r-r^2)2\pi\big)\, dr = \Big[\pi\,\frac{r^3}{3} + \Big(\frac{3}{2}\,r^2 - \frac{r^3}{3}\Big)\,2\pi\Big]_0^2 = \frac{28}{3}\,\pi. \end{aligned}$$

Eine Parametrisierung des Grundkreises

$$G := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 \le 4,\ z = 0\big\}$$

ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} =: g(r,\phi) \qquad \text{mit } (r,\phi) \in [0,2]\times[0,2\pi].$$

Dann ist

$$\partial_r g(r,\phi) \times \partial_\phi g(r,\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\phi \\ r\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor zeigt nach innen. Wegen

$$f(g(r,\phi)) \cdot \big(-\partial_r g(r,\phi) \times \partial_\phi g(r,\phi)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ r\sin\phi \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} = -r$$

ergibt sich für den Fluss von f durch die Grundfläche G nach außen

$$\int_G f \cdot n \, d\sigma = \int_{[0,2]\times[0,2\pi]} f(g(r,\phi)) \cdot \big(-\partial_r g(r,\phi) \times \partial_\phi g(r,\phi)\big) \, d\mu$$
$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} -r \, d\phi \, dr = -\int_0^2 2\pi r \, dr = -4\pi.$$

Der Fluss von f durch die gesamte Oberfläche S des Kegels K nach außen beträgt somit

$$\int_S f \cdot n \, d\sigma = \int_M f \cdot n \, d\sigma + \int_G f \cdot n \, d\sigma = \frac{28}{3}\pi - 4\pi = \frac{16}{3}\pi.$$

Aufgabe 4

Sei $\Omega = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 1,\ 0 < v < 2\pi\}$ und sei $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\Phi(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v),$$

und sei K das Vektorfeld $K(x,y,z) = (y, -x, 0)$. Berechnen Sie den Fluss $\int_S K \cdot n \, d\sigma$ von K durch die Fläche $S := \Phi(\Omega)$.

Lösung:

Es gilt $\partial_u \Phi = (\cos v, \sin v, 0)$, $\partial_v \Phi = (-u\sin v, u\cos v, 1)$, folglich

$$(\partial_u \Phi) \times (\partial_v \Phi) = (\sin v, -\cos v, u).$$

Damit berechnet sich der Fluss durch

$$\begin{aligned}
\int_S K \cdot n \, d\sigma &= \int_\Omega (K \circ \Phi) \cdot ((\partial_u \Phi) \times (\partial_v \Phi)) \, d\mu \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \begin{pmatrix} u\sin v \\ -u\cos v \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin v \\ -\cos v \\ u \end{pmatrix} du dv \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 u \, du dv \\
&= 2\pi \left[\frac{1}{2}u^2\right]_0^1 \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Sei $E \subset \mathbb{R}^3$ die kompakte Menge, die vom Paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$ und der Ebene $z = 0$ berandet wird. Sei S der Rand von E. Weiterhin sei F das Vektorfeld $F(x,y,z) = (y, x, z)$. Berechnen Sie den Fluss $\int_S F \cdot n \, d\sigma$ von F durch die Fläche S.

Lösung:
Sei $S_1 = \{(x,y,z) \in S : z > 0\}$ und $S_2 = \{(x,y,z) \in S : z = 0$, insbesondere $S_1 \cup S_2 = S$ und $\int_S F \cdot n \, d\sigma = \int_{S_1} F \cdot n \, d\sigma + \int_{S_2} F \cdot n \, d\sigma$.

Zunächst zum Integral über S_1: Es gilt $S_1 = \Phi(\Omega)$, wobei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ und $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(x,y) = (x, y, 1 - x^2 - y^2)$. Damit ist $\partial_x \Phi = (1, 0, -2x)$, $\partial_y \Phi = (0, 1, -2y)$ und

$$(\partial_x \Phi) \times (\partial_y \Phi) = (2x, 2y, 1).$$

Wir berechnen mithilfe ebener Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}
\int_{S_1} F \cdot n \, d\sigma &= \int_\Omega (F \circ \Phi) \cdot ((\partial_x \Phi) \times (\partial_y \Phi)) \, d\mu \\
&= \int_\Omega \begin{pmatrix} y \\ x \\ 1 - x^2 - y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} d\mu \\
&= \int_\Omega (1 + 4xy - x^2 - y^2) \, d\mu \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 4r^2 \cos\varphi \sin\varphi - r^2) r \, dr d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r - r^3 + 4r^3 \cos\varphi \sin\varphi) \, dr d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \cos\varphi \sin\varphi \right) d\varphi \\
&= \left[\frac{1}{4}\varphi + \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Nun zum Integral über S_2: Es gilt $S_2 = \Psi(\Omega)$, wobei wieder $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$, und $\Psi : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(x,y) = (x, y, 0)$. Einsetzen in die Formel für den Fluss ergibt sofort $\int_{S_2} F \cdot n \, d\sigma = 0$ (unabhängig von der Orientierung von S_2).

Insgesamt folgt

$$\int_S F \cdot n \, d\sigma = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}.$$