Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

SS 2013
10.06.2013

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

9. Übungsblatt

Aufgabe 1

Ein Heißluftballon habe die Form einer Sphärenkappe vom Radius R und Öffnungsdurchmesser $d < 2R$ (d.h. die Ballonoberfläche B ist die Menge $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ z \geq -\sqrt{R^2 - d^2/4}\}$). Das heiße Gas dringe durch die poröse Oberfläche B mit der Geschwindigkeit

$$v = \text{rot } F, \qquad \text{wobei } F(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Man berechne den Fluss $\int_B v \cdot n \, d\sigma$ durch die Ballonoberfläche B

a) direkt,

b) mittels des Satzes von Stokes,

c) mit Hilfe des Satzes von Gauß.

Aufgabe 2

Es seien Kugelkoordinaten gegeben durch $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(r, \vartheta, \varphi) = (r \sin\vartheta \cos\varphi, r \sin\vartheta \sin\varphi, r \cos\vartheta)$, wobei $U := \mathbb{R}_+ \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$. Sei $u = v \circ \Phi \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ mit $\Omega \subset U$. Zeigen Sie

$$\Delta_g u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Aufgabe 3

In welchen Punkten sind die folgenden Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, auf welchen Gebieten sind sie holomorph? Bestimmen Sie gegebenenfalls f'.

1. $f(x + iy) = \sin x \sin y - i \cos x \cos y \quad (x, y \in \mathbb{R})$,

2. $f(z) = z \,\text{Re}\, z$,

3. $f(z) = \frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z} \quad$ (für $z \neq 0$).

Aufgabe 4

Für $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = \exp(2\pi i t)$ berechne man

a) $\int\limits_{\gamma} \frac{1}{|z|}\, dz$,

b) $\int\limits_{\gamma} \frac{1}{|z|^2}\, dz$.