Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2013
Institut für Analysis 10.06.2013
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

9. Übungsblatt

Aufgabe 1

Ein Heißluftballon habe die Form einer Sphärenkappe vom Radius R und Öffnungsdurchmesser $d < 2R$ (d.h. die Ballonoberfläche B ist die Menge $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ z \geq -\sqrt{R^2 - d^2/4}\}$). Das heiße Gas dringe durch die poröse Oberfläche B mit der Geschwindigkeit

$$v = \text{rot } F, \qquad \text{wobei } F(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Man berechne den Fluss $\int_B v \cdot n \, d\sigma$ durch die Ballonoberfläche B

a) direkt,

b) mittels des Satzes von Stokes,

c) mit Hilfe des Satzes von Gauß.

Lösung:

a) Es gilt $v = \text{rot } F = (0, 0, 2)^t$. Die äußere (Einheits-)Normale am Punkt $(x, y, z) \in B$ ist gegeben durch $n(x, y, z) = \frac{1}{R}(x, y, z)^t$. Mit Hilfe der Kugelkoordinaten (wie in Aufgabe 2) erhalten wir eine Parametrisierung von B durch

$$\Phi : [0, \vartheta_0] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad \Phi(\vartheta, \varphi) = (R \sin \vartheta \cos \varphi, R \sin \vartheta \sin \varphi, R \cos \vartheta),$$

wobei $\vartheta_0 = \arccos\left(-\sqrt{1 - \left(\frac{d}{2R}\right)^2}\right)$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \partial_\vartheta \Phi &= (R \cos \vartheta \cos \varphi, R \cos \vartheta \sin \varphi, -R \sin \vartheta)^t \\ \partial_\varphi \Phi &= (-R \sin \vartheta \sin \varphi, R \sin \vartheta \cos \varphi, 0)^t, \end{aligned}$$

also

$$\partial_\vartheta \Phi \times \partial_\varphi \Phi = R^2 (\sin^2 \cos \varphi, \sin^2 \vartheta \sin \varphi, \sin \vartheta \cos \vartheta)^t$$

und somit

$$\|\partial_\vartheta \Phi \times \partial_\varphi \Phi\| = R^2 \sin \vartheta.$$

Damit berechnen wir

$$\begin{aligned}
\int_B v \cdot n \, d\sigma &= \frac{1}{R} \int_B 2z \, d\sigma \\
&= \frac{1}{R} \int_0^{\vartheta_0} \int_0^{2\pi} 2R\cos\vartheta \cdot R^2 \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \\
&= 4\pi R^2 \int_0^{\vartheta_0} \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta \\
&= 4\pi R^2 \left[-\frac{1}{2}\cos^2\vartheta \right]_0^{\vartheta_0} \\
&= 4\pi R^2 \left(-\frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{d}{2R}\right)^2\right) + \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{\pi d^2}{2}.
\end{aligned}$$

b) Der Satz von Stokes besagt:

$$\int_B v \cdot n \, d\sigma = \int_B \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\partial B} F \cdot d\vec{x}.$$

Sei $z_0 = R\cos\vartheta_0$. Für ∂B ist die Parametrisierung

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \left(\frac{d}{2}\cos t, \frac{d}{2}\sin t, z_0 \right)^t$$

positiv orientiert, und der Fluss berechnet sich durch

$$\begin{aligned}
\int_B v \cdot n \, d\sigma = \int_\gamma F \cdot d\vec{x} &= \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\frac{d}{2}\sin t \\ \frac{d}{2}\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{d}{2}\sin t \\ \frac{d}{2}\cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} \frac{d^2}{4} \, dt = \frac{\pi d^2}{2}.
\end{aligned}$$

c) Beachte zunächst, dass $\operatorname{div} v = 0$. Sei $G = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le \frac{d^2}{4}, z = z_0 \right\}$ die Grundfläche, die den Ballon verschließt, und sei Ω das Innere der durch $B \cup G$ gebildeten geschlossenen Fläche. Der Satz von Gauß besagt:

$$\int_B v \cdot n \, d\sigma + \int_G v \cdot n \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} v \cdot n \, d\sigma = \int_\Omega \operatorname{div} v \, d\mu = 0.$$

Wir berechnen den Fluss durch G mittels der Parametrisierung

$$T : [0, \frac{d}{2}] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad (r, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ -r\sin\varphi \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$T_r \times T_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ -r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix},$$

also $\|T_r \times T_\varphi\| = r$. Der Fluss durch B ist damit

$$\begin{aligned}\int_B v \cdot n\, d\sigma = -\int_G v \cdot n\, d\sigma &= -\int_0^{\frac{d}{2}} \int_0^{2\pi} r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} d\varphi\, dr \\ &= \int_0^{\frac{d}{2}} \int_0^{2\pi} 2r\, d\varphi\, dr = 4\pi \int_0^{\frac{d}{2}} r\, dr = \frac{\pi d^2}{2}.\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Es seien Kugelkoordinaten gegeben durch $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(r, \vartheta, \varphi) = (r \sin\vartheta \cos\varphi, r \sin\vartheta \sin\varphi, r\cos\vartheta)$, wobei $U := \mathbb{R}_+ \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$. Sei $u = v \circ \Phi \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ mit $\Omega \subset U$. Zeigen Sie

$$\Delta_g u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Lösung:
Es gilt

$$\Delta_g u = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(g^{ij} \sqrt{|g|} \frac{\partial u}{\partial x^j}\right).$$

Dabei wird über die Indizes i, j für $1 \le i, j \le 3$ summiert und es ist

$$g := D\Phi^t D\Phi, \quad |g| := \det g, \quad (g^{ij})_{1 \le i,j \le 3} := g^{-1}.$$

Ferner gilt hier $\frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \vartheta}$, $\frac{\partial}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial \varphi}$. Wir berechnen

$$D\Phi = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine direkte Rechnung zeigt

$$g = D\Phi^t D\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\vartheta \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir

$$|g| = \det g = r^4 \sin^2\vartheta$$

und

$$(g^{ij})_{1 \le i,j \le 3} = g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2}\sin^{-2}\vartheta \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\Delta_g u &= \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(1 \cdot r^2 \sin\vartheta \frac{\partial}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(r^{-2} \cdot r^2 \sin\vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(r^{-2}\sin^{-2}\vartheta \cdot r^2 \sin\vartheta \frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)\right) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.\end{aligned}$$

Aufgabe 3

In welchen Punkten sind die folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, auf welchen Gebieten sind sie holomorph? Bestimmen Sie gegebenenfalls f'.

1. $f(x+iy) = \sin x \, \sin y - i \cos x \, \cos y \quad (x, y \in \mathbb{R})$,
2. $f(z) = z \operatorname{Re} z$,
3. $f(z) = \dfrac{z}{\overline{z}} + \dfrac{\overline{z}}{z} \quad$ (für $z \neq 0$).

Lösung:

1. Die Funktionen $u(x,y) := \sin x \, \sin y$ und $v(x,y) := -\cos x \, \cos y$ sind offensichtlich auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Es gilt

$$u_x(x,y) = \cos x \, \sin y\,, \qquad u_y(x,y) = \sin x \, \cos y\,,$$
$$v_x(x,y) = \sin x \, \cos y\,, \qquad v_y(x,y) = \cos x \, \sin y\,.$$

Wir prüfen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (CRD) nach: $u_x = v_y$ ist immer erfüllt. $u_y(x,y) = -v_x(x,y)$ gilt genau dann, wenn $\sin x \, \cos y = 0$ ist, also wenn $x = k\pi$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$ oder $y = (m + \frac{1}{2})\pi$ mit einem $m \in \mathbb{Z}$. Genau in diesen Punkten ist f komplex differenzierbar. Da die Menge

$$M := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \text{ oder } \operatorname{Im} z = (m + \tfrac{1}{2})\pi \text{ für ein } m \in \mathbb{Z} \right\}$$

nicht offen ist, liegt nirgends Holomorphie vor. Für $z = x + iy \in M$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ ergibt sich

$$f'(z) = u_x(x,y) + i v_x(x,y) = \cos x \, \sin y + i \underbrace{\sin x \, \cos y}_{=0,\, \text{da } z \in M} = \cos x \, \sin y\,.$$

2. Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $f(x+iy) = (x+iy)x = x^2 + ixy =: u(x,y) + iv(x,y)$. Die Funktionen $u, v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind stetig differenzierbar mit

$$u_x(x,y) = 2x\,, \qquad u_y(x,y) = 0\,, \qquad v_x(x,y) = y\,, \qquad v_y(x,y) = x\,.$$

Wegen

$$u_x(x,y) = v_y(x,y) \iff 2x = x \iff x = 0\,,$$
$$u_y(x,y) = -v_x(x,y) \iff 0 = -y \iff y = 0$$

sind die CRD nur für $(x,y) = (0,0)$ erfüllt. Deshalb liegt nur in $z = 0$ komplexe Differenzierbarkeit vor. Da $\{0\} \subset \mathbb{C}$ nicht offen ist, ist f nirgends holomorph.

3. Hier ist $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$. Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gilt

$$f(x+iy) = \frac{x+iy}{x-iy} + \frac{x-iy}{x+iy} = \frac{(x+iy)^2}{x^2+y^2} + \frac{(x-iy)^2}{x^2+y^2} = \frac{2x^2 - 2y^2}{x^2+y^2}\,.$$

Wir definieren $u\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $u(x,y) = \frac{2x^2-2y^2}{x^2+y^2}$, sowie $v\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $v(x,y) = 0$. Dann erhalten wir für $(x,y) \neq (0,0)$

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) = u(x,y)\,.$$

Offenbar sind u und v auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig differenzierbar; die Quotientenregel liefert

$$u_x(x,y) = \frac{4x(x^2+y^2) - (2x^2-2y^2)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{8xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

und genauso

$$u_y(x,y) = \frac{-8x^2y}{(x^2+y^2)^2}\,,$$

außerdem gilt

$$v_x(x,y) = v_y(x,y) = 0\,.$$

Damit sind die CRD genau dann erfüllt, wenn

$$\frac{8xy^2}{(x^2+y^2)^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{-8x^2y}{(x^2+y^2)^2} = 0\,,$$

also wenn $x = 0$ oder $y = 0$ gilt. Die Funktion f ist somit nur auf der imaginären und der reellen Achse komplex differenzierbar (natürlich mit Ausnahme des Nullpunktes, wo sie gar nicht definiert ist). Hier lautet die Ableitung

$$f'(x+iy) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = 0\,.$$

Da $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \operatorname{Re} z = 0 \text{ oder } \operatorname{Im} z = 0\}$ nicht offen ist, liegt nirgends Holomorphie vor.

Aufgabe 4

Für $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = \exp(2\pi i t)$ berechne man

a) $\int\limits_\gamma \frac{1}{|z|}\,dz$,

b) $\int\limits_\gamma \frac{1}{|z|^2}\,dz$.

Lösung:

a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\int\limits_\gamma \frac{1}{|z|}\,dz &= \int_0^1 \frac{1}{|\exp(2\pi i t)|} \cdot \exp(2\pi i t) \cdot 2\pi i\,dt \\
&= 2\pi i \int_0^1 \cos(2\pi t) + i\sin(2\pi t)\,dt \\
&= 0.
\end{aligned}$$

b) Wie in a) gilt

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\gamma} \frac{1}{|z|^2}\, dz &= \int_0^1 \frac{1}{|\exp(2\pi i t)|^2} \cdot \exp(2\pi i t) \cdot 2\pi i\, dt \\
&= 2\pi i \int_0^1 \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t)\, dt \\
&= 0.
\end{aligned}
$$