Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

SS 2013
17.06.2013

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

10. Übungsblatt

Aufgabe 1

Zu den folgenden gegebenen harmonischen Funktionen konstruiere man jeweils eine holomorphe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit dem gegebenen Realteil u:

a) $D = \mathbb{C}$ und $u : D \to \mathbb{R}$ mit $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 1$.

b) $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $u : D \to \mathbb{R}$ mit $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.

c) $D = \mathbb{C}$ und $u : D \to \mathbb{R}$ mit $u(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y)$.

d) $D = \mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} : t \leq 0\}$ mit $u : D \to \mathbb{R}$ mit $u(x, y) = \sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}$.

Aufgabe 2

Berechnen Sie den Wert der folgenden Kurvenintegrale.

a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^3}{z^2+1}\, dz$

b) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2+2z}\, dz$

c) $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{ze^{iz}}{(z-\pi)^3}\, dz$

d) $\displaystyle\int_{|z-2|=3} \frac{e^{i\cos z}\sin(z^4+1) - z}{(z-7)^{42}}\, dz$

Hinweis: Es gilt $\frac{1}{z^2+1} = \frac{i/2}{z+i} - \frac{i/2}{z-i}$ für $z \notin \{-i, i\}$ und $\frac{1}{z^2+2z} = \frac{1}{2}(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+2})$ für $z \notin \{-2, 0\}$.

Aufgabe 3

Sei γ die folgende Kurve

$$\gamma(t) := \begin{cases} 1 - \exp(it), & t \in [0, 2\pi], \\ -1 + \exp(-it), & t \in [2\pi, 4\pi]. \end{cases}$$

("Figur Acht"). Man berechne das Integral

$$\int_\gamma \frac{1}{1 - z^2}\, dz.$$

Aufgabe 4

Es sei $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$, γ ein Halbkreis: $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ mit $\gamma_1 = [-R, R]$, $\gamma_2(t) = Re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$. Berechnen Sie für $R > 1$:

$$\int_\gamma f(z)\, dz.$$

Zeigen Sie: $\lim\limits_{R \to \infty} \int_{\gamma_2} f(z)\, dz = 0$.

Folgern Sie: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$.