Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

SS 2013
17.06.2013

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

10. Übungsblatt

Aufgabe 1

Zu den folgenden gegebenen harmonischen Funktionen konstruiere man jeweils eine holomorphe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit dem gegebenen Realteil u:

a) $D = \mathbb{C}$ und $u : D \to \mathbb{R}$ mit $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 1$.

b) $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $u : D \to \mathbb{R}$ mit $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.

c) $D = \mathbb{C}$ und $u : D \to \mathbb{R}$ mit $u(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y)$.

d) $D = \mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} : t \leq 0\}$ mit $u : D \to \mathbb{R}$ mit $u(x, y) = \sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}$.

Lösung:

a) Mit den Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen muss für $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ gelten:

$$\partial_x u = \partial_y v \text{ und } \partial_y u = -\partial_x v,$$

also $\partial_y v = 3x^2 - 3y^2$, und $\partial_x v = 6xy$. Es folgt $v(x, y) = 3x^2y - y^3 + \tilde{v}(x)$. Dann gilt $\partial_x v(x, y) = 6xy + \tilde{v}'(x) = 6xy$. Dies ist zum Beispiel für $\tilde{v}(x) = 0$ erfüllt. Also ist $f(z) = x^3 - 3xy^2 + 1 + i(3x^2y - y^3) = z^3 + 1$.

b) Wir gehen vor wie in Teil a): Es muss gelten

$$\partial_y v = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \partial_x v = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Es folgt $v(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + \tilde{v}(x)$. Damit gilt $\partial_x v(x, y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \tilde{v}'(x) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$. Wähle $\tilde{v}(x) = 0$. Also ist $f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{x-iy}{(x-iy)(x+iy)} = \frac{1}{z}$.

c) Es muss gelten

$$\partial_y v = e^x(x \cos y - y \sin y + \cos y), \quad \partial_x v = e^x(x \sin y + \sin y + y \cos y).$$

Es folgt $v(x, y) = e^x(x \sin y + y \cos y) + \tilde{v}(x)$. Damit gilt $\partial_x v(x, y) = e^x(x \sin y + y \cos y + \sin y) + \tilde{v}'(x) = e^x(x \sin y + \sin y + y \cos y)$. Wähle wieder $\tilde{v}(x) = 0$. Also ist $f(z) = e^x(x \cos y - y \sin y) + ie^x(x \sin y + y \cos y) = e^x(x + iy)(\cos y + i \sin y) = ze^x e^{iy} = ze^{x+iy} = ze^z$.

d) Teil d) könnte wie oben berechnet werden; alternativ sieht man leicht, dass u der Realteil des Hauptzweiges der komplexen Wurzel ist ($z = re^{i\varphi} \mapsto \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}$):

Ist $z = x+iy = \sqrt{x^2+y^2}e^{i\varphi}$, so folgt $\sqrt{z} = \sqrt[4]{x^2+y^2}e^{i\frac{\varphi}{2}}$, also $\operatorname{Re}\sqrt{z} = \sqrt[4]{x^2+y^2}\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt[4]{x^2+y^2}\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}$.

Dabei wurde $\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ verwendet und das Additionstheorem $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$. Da $\sqrt{z}$ auf D holomorph ist (nachrechnen oder aus komplexer Version des Umkehrsatzes folgern), ist also $\sqrt{z}$ die gesuchte holomorphe Funktion.

Aufgabe 2

Berechnen Sie den Wert der folgenden Kurvenintegrale.

a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^3}{z^2+1}\,dz$

b) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2+2z}\,dz$

c) $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{ze^{iz}}{(z-\pi)^3}\,dz$

d) $\displaystyle\int_{|z-2|=3} \frac{e^{i\cos z}\sin(z^4+1)-z}{(z-7)^{42}}\,dz$

Hinweis: Es gilt $\frac{1}{z^2+1} = \frac{i/2}{z+i} - \frac{i/2}{z-i}$ für $z \notin \{-i, i\}$ und $\frac{1}{z^2+2z} = \frac{1}{2}(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+2})$ für $z \notin \{-2, 0\}$.

Lösung:

a) Wir verwenden bei diesem Integranden die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{i/2}{z+i} - \frac{i/2}{z-i}\,.$$

Da die Punkte $-i$ und i im Inneren der Kreislinie $|z| = 2$ liegen und die Funktion $z \mapsto iz^3/2$ im Gebiet $G = \mathbb{C}$ holomorph ist, ergibt sich mit der Cauchyschen Integralformel

$$\begin{aligned}\int_{|z|=2} \frac{z^3}{z^2+1}\,dz &= \int_{|z|=2} \frac{iz^3/2}{z-(-i)}\,dz - \int_{|z|=2} \frac{iz^3/2}{z-i}\,dz \\ &= 2\pi i\,\frac{iz^3}{2}\bigg|_{z=-i} - 2\pi i\,\frac{iz^3}{2}\bigg|_{z=i} = -\pi(-i)^3 + \pi i^3 = -2\pi i\,.\end{aligned}$$

Alternativ: Die Kreislinie $|z| = 2$ wird parametrisiert durch $\gamma(t) = 2e^{it}$, $(t \in [0, 2\pi])$. Wir definieren die Kurven r und s durch $r = r_1 + r_2$ sowie $s = s_1 + s_2$ wobei

$$\begin{aligned} &r_1(t) = 2e^{it},\ t \in [0,\pi] \qquad &r_2(t) = -2+t,\ t \in [0,4] \\ &s_1(t) = 2e^{it},\ t \in [\pi, 2\pi] \qquad &s_2(t) = 2-t,\ t \in [0,4]\end{aligned}$$

(r ist ein geschlossener Weg, der die obere Hälfte des Kreises durchläuft und dann auf der reellen Achse von -2 nach 2 geht. s ist ebenso geschlossen, durchläuft die untere Hälfte des Kreises und dann auf der reellen Achse von 2 nach -2). Insbesondere ist $s_2 = -r_2$, und es gilt somit ($f(z) := \frac{z^3}{z^2+1}$):

$$\int_{|z|=2} f(z)\,dz = \int_{r_1} f(z)\,dz + \underbrace{\int_{r_2} f(z)\,dz + \int_{s_2} f(z)\,dz}_{=0} + \int_{s_2} f(z)\,,dz = \int_r f(z)\,dz + \int_s f(z)\,dz$$

Betrachten wir die Funktionen $f_1(z) = \frac{z^3}{z+i}$ und $f_2(z) = \frac{z^3}{z-i}$, so sehen wir, dass f_1 in einer Umgebung des von r umlaufenen Gebietes holomorph ist. Genauso ist f_2 in einer Umgebung des von s umlaufenen Gebietes holomorph. Wir können also die Cauchysche Integralformel anwenden und erhalten (beachte, dass $f(z) = \frac{f_1(z)}{z-i} = \frac{f_2(z)}{z+i}$ gilt):

$$\int_{|z|=2} f(z)\,dz = \int_r f(z)\,dz + \int_s f(z)\,dz = 2\pi i f_1(i) + 2\pi i f_2(-i) = 2\pi i\left(\frac{i^3}{2i} + \frac{-i^3}{-2i}\right) = -2\pi i.$$

b) Der Integrand lässt sich hier wie folgt umschreiben

$$\frac{e^z}{z^2+2z} = \frac{e^z}{z(z+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^z}{z} - \frac{e^z}{z+2}\right).$$

Der Punkt 0 liegt im Inneren des Integrationsweges, der Punkt -2 dagegen im Äußeren. Folglich liefern die Cauchysche Integralformel und der Cauchysche Integralsatz

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2+2z}\,dz = \frac{1}{2}\left(\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z-0}\,dz - \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z+2}\,dz\right) = \frac{1}{2}\left(2\pi i\, e^z\big|_{z=0} - 0\right) = \pi i\,.$$

Alternativ: Die Funktion $g(z) = \frac{e^z}{z+2}$ ist holomorph in einer Umgebung des Gebietes, das von der Kreisline $|z| = 1$ umlaufen wird. Wir können somit direkt die Cauchysche Integralformel anwenden und erhalten:

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z(z+2)}\,dz = 2\pi i g(0) = 2\pi i \frac{1}{2} = \pi i.$$

c) Für die durch $f(z) := ze^{iz}$ definierte, in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion f gilt

$$f'(z) = e^{iz} + z(ie^{iz}) = (1+iz)e^{iz}\,, \qquad f''(z) = ie^{iz} + (1+iz)(ie^{iz}) = (2i-z)e^{iz}\,,$$

und wegen $|\pi| < 4$ erhalten wir mit der Cauchyschen Integralformel für Ableitungen

$$\int_{|z|=4} \frac{ze^{iz}}{(z-\pi)^3}\,dz = 2\pi i\,\frac{f''(\pi)}{2!} = \pi i\,(2i-z)e^{iz}\big|_{z=\pi} = \pi i\,(2i-\pi)(-1) = 2\pi + i\pi^2\,.$$

d) Die Nullstelle $z_0 = 7$ des Nenners des Integranden liegt außerhalb der Kreislinie $|z-2| = 3$, denn $|7-2| = 5 > 3$. Der Integrand ist also holomorph in dem konvexen und damit einfach zusammenhängenden Gebiet $G := \{\, z \in \mathbb{C} : |z-2| < 5 \,\}$, in welchem auch der glatte, geschlossene Integrationsweg verläuft. Aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt somit

$$\int_{|z-2|=3} \frac{e^{i\cos z}\sin(z^4+1) - z}{(z-7)^{42}}\,dz = 0\,.$$

Aufgabe 3

Sei γ die folgende Kurve

$$\gamma(t) := \begin{cases} 1 - \exp(it), & t \in [0, 2\pi], \\ -1 + \exp(-it), & t \in [2\pi, 4\pi]. \end{cases}$$

("Figur Acht"). Man berechne das Integral

$$\int_\gamma \frac{1}{1 - z^2}\, dz.$$

Lösung:
Der Punkt $1 \in \mathbb{C}$ wird einmal im positiven Sinn umlaufen, der Punkt $-1 \in \mathbb{C}$ einmal im negativen Sinn. Wir bezeichnen mit γ_1 den Kreis um 1, mit γ_2 den (negativ orientierten) Kreis um -1. Dann ist $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. Mit der Cauchyschen Integralformel folgt

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{1}{1 - z^2}\, dz &= \int_{\gamma_1} \frac{1}{1 - z^2}\, dz + \int_{\gamma_2} \frac{1}{1 - z^2}\, dz \\ &= -\int_{\gamma_1} \frac{\frac{1}{1+z}}{z - 1}\, dz + \int_{\gamma_2} \frac{\frac{1}{1-z}}{z - (-1)}\, dz \\ &= -2\pi i \frac{1}{1 + 1} - 2\pi i \frac{1}{1 - (-1)} \\ &= -2\pi i. \end{aligned}$$

Dabei wurde beachtet, dass γ_2 im negativen Sinn umlaufen wird.

Aufgabe 4

Es sei $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$, γ ein Halbkreis: $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ mit $\gamma_1 = [-R, R]$, $\gamma_2(t) = Re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$. Berechnen Sie für $R > 1$:

$$\int_\gamma f(z)\, dz.$$

Zeigen Sie: $\lim\limits_{R \to \infty} \int_{\gamma_2} f(z)\, dz = 0$.

Folgern Sie: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$.

Lösung:
Der Punkt i liegt innerhalb des durch γ berandeten Gebietes, der Punkt $-i$ außerhalb diesen Gebietes. Setze $g(z) = \frac{1}{1+z^2}$. Aus der Cauchyschen Integralformel folgt

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma \frac{\frac{i}{z+i}}{z - i}\, dz = \int_\gamma \frac{g(z)}{z - i}\, dz = 2\pi i g(i) = \pi.$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| &\leq \int_0^\pi |f(\gamma_2(t))\gamma_2'(t)|\,dt \\
&= \int_0^\pi \left|\frac{Re^{it}\cdot i}{1+R^2e^{2it}}\right|\,dt \\
&\leq \int_0^\pi \frac{1}{R}\,dt \\
&= \frac{\pi}{R} \to 0 \text{ für } R\to\infty,
\end{aligned}$$

also $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{dx}{1+x^2} \\
&= \lim_{R\to\infty}\left(\pi - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right) \\
&= \pi.
\end{aligned}$$