Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

SS 2013
24.06.2013

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

11. Übungsblatt

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Laurent-Reihen der folgenden Funktionen in den angegebenen Gebieten:

a) $\frac{\sin z}{z}$ für $z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$,

b) $\frac{1}{z(z-3)^2}$ für $1 < |z-1| < 2$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie jeweils die Typen der auftretenden Singularitäten:

a) $f(z) = \frac{z^3+3z+2i}{z^2+1}$ in $z_0 = -i$ und $z_1 = i$,

b) $g(z) = \frac{1}{e^{z^2}-1}$ in $z_0 = 0$,

c) $h(z) = z^3 e^{-\frac{1}{z}}$ in $z_0 = 0$.

Aufgabe 3

Das Residuum einer Funktion f im Punkt z_0 ist definiert durch $\mathrm{Res}(f, z_0) := a_{-1}$, wobei $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ die Laurent-Reihe von f um z_0 ist.

a) Sei $r > 0$ und $f : K_{0,r}(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph mit einem Pol m-ter Ordnung bei z_0. Zeigen Sie:

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[f(z)(z-z_0)^m \right] \right).$$

Speziell für $m = 1$ gilt $\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)$.

b) Seien g und h in einer Umgebung von z_0 holomorph. Die Funktion g habe in z_0 eine einfache Nullstelle (also $1/g$ einen einfachen Pol). Zeigen Sie:

$$\mathrm{Res}\left(\frac{h(z)}{g(z)}, z_0 \right) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Residuen in den Singularitäten der folgenden Funktionen:

a) $\frac{1-\cos z}{z}$

b) $\frac{e^z}{(z-1)^3}$

Aufgabe 5 (Verallgemeinerter Satz von Liouville)

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Es gebe Konstanten $C, R < \infty$, sowie ein $n \in \mathbb{N}_0$, so dass

$$|f(z)| \leq C|z|^n \text{ für alle } |z| \geq R.$$

Zeigen Sie, dass f ein Polynom vom Grad höchstens n ist.