Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2013
Institut für Analysis 24.06.2013
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

**Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik**

**11. Übungsblatt**

### Aufgabe 1

Berechnen Sie die Laurent-Reihen der folgenden Funktionen in den angegebenen Gebieten:

a) $\frac{\sin z}{z}$ für $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$,

b) $\frac{1}{z(z-3)^2}$ für $1 < |z-1| < 2$.

**Lösung:**

a) Die Taylorreihe des Sinus ist $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Damit erhält man die Laurent-Reihe $\frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$.

b) Mit $w := z-1$ berechnen wir für $1 < |w| < 2$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z-3)^2} &= \frac{1}{((z-1)+1)((z-1)-2)^2}\\ &= \frac{1}{(w+1)(w-2)^2}\\ &= \frac{A}{w+1} + \frac{B}{w-2} + \frac{C}{(w-2)^2}\\ &= \frac{A(w^2-4w+4) + B(w^2-w-2) + C(w+1)}{z(z-3)^2}.\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt: $A+B=0$, $-4A-B+C=0$, $4A-2B+C=1$. Es folgt $A=\frac{1}{9}$, $B=-\frac{1}{9}$, $C=\frac{1}{3}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z-3)^2} &= \frac{1}{9}\frac{1}{w}\frac{1}{1-(-\frac{1}{w})} + \frac{1}{18}\frac{1}{1-\frac{w}{2}} + \frac{1}{6}\frac{1}{w}\frac{\frac{w}{2}}{(1-\frac{w}{2})^2}\\ &\overset{(*)}{=} \frac{1}{9}\frac{1}{w}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{w}\right)^n + \frac{1}{18}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w}{2}\right)^n + \frac{1}{6}\frac{1}{w}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{w}{2}\right)^n\\ &= \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^{-n-1} + \frac{1}{18}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n w^n + \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n w^{n-1}\\ &= -\frac{1}{9}\sum_{n=-1}^{-\infty}(-1)^n w^n + \frac{1}{18}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n w^n + \frac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n w^n\\ &= \frac{1}{9}\left[-\sum_{n=-1}^{-\infty}(-1)^n w^n + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(3n+5)\left(\frac{1}{2}\right)^n w^n\right]\\ &= \frac{1}{9}\left[-\sum_{n=-1}^{-\infty}(-1)^n (z-1)^n + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(3n+5)\left(\frac{1}{2}\right)^n (z-1)^n\right]\end{aligned}$$

für $1 < |z-1| < 2$. Die letzte Zeile ist die gesuchte Laurent-Reihe. Dabei wurden in $(*)$ die Entwicklungen $\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n = \frac{1}{1-\zeta}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} n\zeta^n = \frac{\zeta}{(1-\zeta)^2}$ für $|\zeta| < 1$ verwendet (letztere erhält man, indem man $\frac{1}{1-\zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n$ differenziert und nach $\sum_{n=0}^{\infty} n\zeta^n$ auflöst).

## Aufgabe 2

Bestimmen Sie jeweils die Typen der auftretenden Singularitäten:

a) $f(z) = \frac{z^3+3z+2i}{z^2+1}$ in $z_0 = -i$ und $z_1 = i$,

b) $g(z) = \frac{1}{e^{z^2}-1}$ in $z_0 = 0$,

c) $h(z) = z^3 e^{-\frac{1}{z}}$ in $z_0 = 0$.

**Lösung:**

a) Polynomdivision ergibt $\frac{z^3+3z+2i}{z^2+1} = \frac{z^2-iz+2}{z-i}$. Folglich ist $f$ in einer punktierten Umgebung $U\backslash\{-i\}$ von $-i$ beschränkt. Also ist $z_0 = -i$ eine hebbare Singularität. Ferner ist $\frac{z^2-iz+2}{z-i} = z + \frac{2}{z-i}$. Also ist $z_1 = i$ ein Pol erster Ordnung.

b) Es gilt $e^{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}$, also $g(z) = \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}} = \frac{1}{z^2\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(n+1)!}\right)}$. Folglich ist $z_0 = 0$ ein Pol zweiter Ordnung.

c) Es gilt $e^{-\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{z}\right)^n}{n!}$, also

$$\begin{aligned} h(z) &= z^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n \\ &= \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{(-1)^{3-n}}{(3-n)!} z^n + \sum_{n=0}^{3} \frac{(-1)^{3-n}}{(3-n)!} z^n. \end{aligned}$$

Damit sind unendlich viele Glieder des Hauptteils der Laurent-Reihe (um den Ursprung) ungleich 0. Also ist $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität.

## Aufgabe 3

Das Residuum einer Funktion $f$ im Punkt $z_0$ ist definiert durch $\operatorname{Res}(f, z_0) := a_{-1}$, wobei $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ die Laurent-Reihe von $f$ um $z_0$ ist.

a) Sei $r > 0$ und $f : K_{0,r}(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph mit einem Pol $m$-ter Ordnung bei $z_0$. Zeigen Sie:

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \left( \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[ f(z)(z-z_0)^m \right] \right).$$

Speziell für $m = 1$ gilt $\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$.

b) Seien $g$ und $h$ in einer Umgebung von $z_0$ holomorph. Die Funktion $g$ habe in $z_0$ eine einfache Nullstelle (also $1/g$ einen einfachen Pol). Zeigen Sie:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{h(z)}{g(z)}, z_0\right) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}.$$

**Lösung:**

a) Da $z_0$ ein Pol der Ordnung $m$ ist, gibt es eine Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Es folgt

$$(z - z_0)^m f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m} (z - z_0)^n,$$

und damit

$$\begin{aligned} & \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[f(z)(z - z_0)^m] \\ = \quad & \sum_{n=m-1}^{\infty} a_{n-m} n(n-1) \dots (n-m+2)(z - z_0)^{n-m+1} \\ \to \quad & a_{m-1-m}(m-1)! = a_{-1}(m-1)! \qquad \text{für } z \to z_0. \end{aligned}$$

Das ist die Behauptung. Den Spezialfall $m = 1$ liest man direkt an der allgemeinen Formel ab.

b) Da $z_0$ einfache Nullstelle von $g$, existiert eine Entwicklung $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ mit $a_1 \neq 0$ und es gilt $g'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)(z - z_0)^n$. Es folgt

$$g'(z_0) = a_1 = \lim_{z \to z_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (z - z_0)^n.$$

Teil a) für $m = 1$ liefert

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\frac{h(z)}{g(z)}, z_0\right) &= \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{g(z)} h(z) \\ &= \lim_{z \to z_0} \frac{h(z)}{\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(z - z_0)^n} \\ &= \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}. \end{aligned}$$

**Aufgabe 4**

Bestimmen Sie die Residuen in den Singularitäten der folgenden Funktionen:

a) $\frac{1-\cos z}{z}$

b) $\frac{e^z}{(z-1)^3}$

**Lösung:**

a) Wir haben die Reihendarstellung $\frac{1-\cos z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2(n+1))!}$. Insbesondere ist $z = 0$ hebbare Singularität und damit $\mathrm{Res}(\frac{1-\cos z}{z}, 0) = 0$.

b) Der Punkt $z = 1$ ist Pol dritter Ordnung. Wir berechnen mit Aufgabe 1 a)

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}\left(\frac{e^z}{(z-1)^3}, 1\right) &= \lim_{z\to 1} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2}(e^z) \\ &= \lim_{z\to 1} \frac{1}{2} e^z \\ &= \frac{e}{2}. \end{aligned}$$

**Aufgabe 5** (Verallgemeinerter Satz von Liouville)

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Es gebe Konstanten $C, R < \infty$, sowie ein $n \in \mathbb{N}_0$, so dass

$$|f(z)| \leq C|z|^n \text{ für alle } |z| \geq R.$$

Zeigen Sie, dass $f$ ein Polynom vom Grad höchstens $n$ ist.

**Lösung:**
Da $f$ eine ganze Funktion ist, existiert eine Potenzreihendarstellung $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Nach Voraussetzung gilt $|f(z)| \leq C|z|^n$ für $|z|$ hinreichend groß. Wegen $|\sum_{k=0}^{n} a_k z^k| \leq (|a_0| + \ldots + |a_n|)|z|^n$ für $|z| \geq 1$, gilt auch

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k\right| \leq C'|z|^n = C'|z^n|$$

für eine Konstante $C' < \infty$ und $|z|$ hinreichend groß. Es folgt $|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \frac{z^k}{z^n}| = |\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} z^k| \leq C'$ für $|z|$ groß. Damit ist die ganze Funktion $g(z) := \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} z^k$ auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt, nach dem gewöhnlichen Satz von Liouville also konstant. Aus $g(0) = 0$ folgt $g \equiv 0$ und $a_k = 0$ für $k \geq n+1$. Schließlich ist $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$.