Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2013
Institut für Analysis 01.07.2013
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

12. Übungsblatt

Aufgabe 1

Berechnen Sie folgende Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:

a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}\,dz$

b) $\displaystyle\int_{|z|=9} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}\,dz$

c) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z}{e^{iz}-1}\,dz$

d) $\displaystyle\int_{|z|=2} \exp\Big(\frac{z}{1-z}\Big)\,dz$

e) $\displaystyle\int_{\partial G} \frac{2z}{(z-1)(z+2)(z+i)}\,dz$ mit $G := \{z \in \mathbb{C} : -3 < \text{Re } z < 2,\ -2 < \text{Im } z < 3\}$

Lösung:

a) Der Integrand $f(z) := \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}$ besitzt in 1 eine einfache und in -3 eine doppelte Polstelle und ist holomorph auf $\mathbb{C}\setminus\{1,-3\}$. Da innerhalb des Integrationsweges $|z| = 2$ nur die Polstelle 1 liegt, liefert der Residuensatz

$$\int_{|z|=2} f(z)\,dz = 2\pi i \,\text{Res}(f,1) = \frac{e\pi i}{8}\,,$$

denn für das Residuum von f in 1 gilt

$$\text{Res}(f,1) = (z-1)f(z)\Big|_{z=1} = \frac{e^z}{(z+3)^2}\Big|_{z=1} = \frac{e}{16}\,.$$

b) Nun liegen die beiden Polstellen -3 und 1 von f innerhalb des Integrationsweges $|z| = 9$. Deswegen gilt nach dem Residuensatz

$$\int_{|z|=9} f(z)\,dz = 2\pi i\Big(\text{Res}(f,1) + \text{Res}(f,-3)\Big) = 2\pi i\Big(\frac{e}{16} - \frac{5e^{-3}}{16}\Big) = \frac{(e-5e^{-3})\pi i}{8}\,,$$

da

$$\text{Res}(f,-3) = \left(\frac{d}{dz}\left((z+3)^2 f(z)\right)\right)\Bigg|_{z=-3} = \left(\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{z-1}\right)\right)\Bigg|_{z=-3} = \left(\frac{e^z(z-1)-e^z}{(z-1)^2}\right)\Bigg|_{z=-3}$$
$$= \frac{-5e^{-3}}{16}\,.$$

c) Schreibe $f(z) := \frac{z}{e^{iz}-1}$. Der Nenner von $f(z)$ wird genau dann 0, wenn $z = 2k\pi$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$ gilt. Von diesen Punkten liegt nur $z = 0$ im Inneren des Kreises $|z| = 1$. Daher ist

$$\int_{|z|=1} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0)\,.$$

Nun sieht man anhand der Darstellung

$$f(z) = \frac{z}{e^{iz}-1} = \frac{z}{\left(1 + iz + \frac{1}{2}(iz)^2 + \cdots\right) - 1} = \frac{z}{iz - \frac{1}{2}z^2 + \cdots} = \frac{1}{i - \frac{1}{2}z + \cdots}\,,$$

dass in $z = 0$ eine hebbare Singularität von f vorliegt. Deshalb gilt $\operatorname{Res}(f, 0) = 0$ und das Integral hat den Wert 0.

d) Sei $f(z) := e^{\frac{z}{1-z}}$. Hier liefert der Residuensatz

$$\int_{|z|=2} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 1)\,.$$

Um das Residuum $\operatorname{Res}(f, 1)$ zu berechnen, betrachten wir die Laurententwicklung von f um 1

$$f(z) = \exp\left(\frac{z}{1-z}\right) = \exp\left(-1 + \frac{1}{1-z}\right) = e^{-1}e^{-1/(z-1)} = e^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}(z-1)^{-k}\,;$$

der Koeffizient von $(z-1)^{-1}$ lautet $-e^{-1}$. Also ist $\operatorname{Res}(f, 1) = -e^{-1}$ und damit

$$\int_{|z|=2} \exp\left(\frac{z}{1-z}\right) dz = -\frac{2\pi i}{e}\,.$$

e) Der Integrand $f(z) := \frac{2z}{(z-1)(z+2)(z+i)}$ besitzt in $1, -2, -i$ jeweils einen Pol erster Ordnung und ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{1, -2, -i\}$. Da sich alle Polstellen im Inneren von G befinden, ergibt sich nach dem Residuensatz

$$\int_{\partial G} f(z)\,dz = 2\pi i \Big(\operatorname{Res}(f, 1) + \operatorname{Res}(f, -2) + \operatorname{Res}(f, -i)\Big)\,.$$

Wir berechnen nun die Residuen von f in den (einfachen) Polstellen

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f, 1) &= (z-1)f(z)\Big|_{z=1} = \frac{2z}{(z+2)(z+i)}\Big|_{z=1} = \frac{2}{3(1+i)} = \frac{1}{3}\,(1-i)\,,\\
\operatorname{Res}(f, -2) &= (z+2)f(z)\Big|_{z=-2} = \frac{2z}{(z-1)(z+i)}\Big|_{z=-2} = \frac{4}{3(-2+i)} = -\frac{4}{15}\,(2+i)\,,\\
\operatorname{Res}(f, -i) &= (z+i)f(z)\Big|_{z=-i} = \frac{2z}{(z-1)(z+2)}\Big|_{z=-i} = \frac{2i}{(i+1)(-i+2)} = \frac{1}{5}\,(1+3i)\,.
\end{aligned}$$

Hiermit ist

$$\int_{\partial G} f(z)\,dz = 2\pi i \Big(\frac{1}{3}\,(1-i) - \frac{4}{15}\,(2+i) + \frac{1}{5}\,(1+3i)\Big) = 0\,.$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie:

a) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{2a} \quad (a > 0 \text{ fest})$

b) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^3}\,dx = \frac{7\pi}{16e}$

Lösung:

a) Für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$f(z) := \frac{z^2}{(z^2+a^2)^2} = \frac{z^2}{(z+ia)^2(z-ia)^2}.$$

Also ist ia ein Pol zweiter Ordnung. Sei nun $r > 0$. Sei weiter γ_1 die Strecke $[-r, r]$ und γ_2 der Halbkreisbogen auf $\partial B_r(0)$ auf der oberen Halbebene von r nach $-r$. Schließlich sei γ der geschlossene Weg von und nach $-r$, der durch Verbindung von γ_1 und γ_2 gegeben ist. Nach Blatt 11, Aufgabe 3 a) gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f, ia) &= \lim_{z\to ia} \frac{d}{dz} \frac{z^2}{(z+ia)^2} \\
&= \lim_{z\to ia} \frac{2z(z+ia)^2 - 2z^2(z+ia)}{(z+ia)^4} \\
&= \frac{1}{4ia}.
\end{aligned}$$

Der Weg γ umschließt für $r > a$ den Pol ia. Aus dem Residuensatz folgt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, ia) = \frac{\pi}{2a}.$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\gamma_2} f(z)\,dz \right| &\leq \pi r \cdot \frac{1}{r^2} \\
&\longrightarrow 0 \quad \text{für } r \to \infty.
\end{aligned}$$

Mit $r \to \infty$ erhalten wir

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}.$$

b) Wir berechnen zunächst $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(1+x^2)^3}\,dx$. Für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$g(z) := \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^3} = \frac{e^{iz}}{(z+i)^3(z-i)^3}.$$

Also ist i ein Pol dritter Ordnung. Nach Blatt 11, Aufgabe 3 a) gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(g,i) &= \lim_{z\to i} \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{e^{iz}}{(z+i)^3}\right) \\
&= \lim_{z\to i} \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left(\frac{(iz-4)e^{iz}}{(z+i)^4}\right) \\
&= \lim_{z\to i} \frac{1}{2}\frac{(ie^{iz}+i(iz-4)e^{iz})(z+i)-4(iz-4)e^{iz}}{(z+i)^5} \\
&= \frac{1}{2}\frac{(i\frac{1}{e}+i(-1-4)\frac{1}{e})(2i)-4(-1-4)\frac{1}{e}}{32i} \\
&= \frac{7}{16ie}.
\end{aligned}$$

Seien γ, γ_1 und γ_2 wie in Teil a). Es gilt $\lim_{r\to\infty}\int_{\gamma_2}\frac{e^{iz}}{(1+z^2)^3}\,dz = 0$ (für einen Beweis dazu siehe bspw. Fischer-Lieb, Funktionentheorie). Nach dem Residuensatz gilt also

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\cos x}{(1+x^2)^3}\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{(1+x^2)^3}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x + i\sin x}{(1+x^2)^3}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{(1+x^2)^3}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\cdot 2\pi i\frac{7}{16ie} \\
&= \frac{7\pi}{16e}.
\end{aligned}$$

Dabei wurde in der zweiten Zeile verwendet, dass $\frac{i\sin x}{(1+x^2)^3}$ eine ungerade Funktion ist, das Integral darüber also verschwindet.

Aufgabe 3

Sei $-1 < a < 1$. Berechnen Sie das Integral $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a\cos t+a^2}\,dt$ auf zwei unterschiedliche Weisen:

a) Durch geeignete Substitution.

b) Mit Hilfe des Residuensatzes.

Lösung:

a) Wegen $\cos t = \cos(2\pi - t)$ gilt

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a\cos t+a^2}\,dt = 2\int_0^{\pi} \frac{1}{1-2a\cos t+a^2}\,dt.$$

Für $0 \le t < \pi$ substituieren wir $x = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$. Dann ist $dt = \frac{2\,dx}{1+x^2}$ und $\cos t = \frac{1-x^2}{1+x^2}$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a\cos t + a^2}\,dt &= 4\int_0^\infty \frac{1}{1-2a\frac{1-x^2}{1+x^2}+a^2} \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx \\
&= 4\int_0^\infty \frac{1}{(1+a)^2x^2+(1-a)^2}\,dx \\
&= \frac{4}{(1-a)^2}\int_0^\infty \frac{1}{\frac{(1+a)^2}{(1-a)^2}x^2+1}\,dx \\
&= \frac{4}{(1-a)^2}\cdot\frac{1-a}{1+a}\int_0^\infty \frac{1}{y^2+1}\,dy \\
&= \frac{4}{1-a^2}\lim_{s\to\infty}[\arctan y]_0^s \\
&= \frac{4}{1-a^2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) \\
&= \frac{2\pi}{1-a^2}.
\end{aligned}$$

b) Wegen $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it}+e^{-it})$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a\cos t + a^2}\,dt &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{1-a(e^{it}+e^{-it})+a^2}\,dt \\
&= \int_{|z|=1} \frac{1}{1-a\left(z+\frac{1}{z}\right)+a^2}\cdot\frac{1}{iz}\,dz \\
&= \int_{|z|=1} \frac{i/a}{(z-a)(z-1/a)}\,dz,
\end{aligned}$$

wobei in der zweiten Zeile die Definition des komplexen Kurvenintegrales verwendet wurde. Der Integrand hat genau eine Singularität im Einheitskreis, nämlich a. Wir bezeichnen den Integranden mit $f(z)$. Da a ein Pol erster Ordnung ist, gilt nach Blatt 11, Aufgabe 3 a)

$$\operatorname{Res}(f,a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a}\frac{i/a}{z-1/a} = \frac{i}{a^2-1}.$$

Aus dem Residuensatz folgt nun

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a\cos t+a^2}\,dt = 2\pi i\cdot\operatorname{Res}(f,a) = \frac{2\pi}{1-a^2}.$$

Aufgabe 4

a) Sei $n \ge 2$ gerade. Berechnen Sie das Integral $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n}$.

b) Sei $n \ge 3$ ungerade. Berechnen Sie abermals $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n}$.

Lösung:

Wir berechnen zunächst das Integral für gerade n. Anschließend geben wir eine alternative Rechnung an, die sowohl für gerades, als auch für ungerades n zur Lösung führt.

- Sei $n \geq 2$ gerade. Wir setzen $f(z) = \frac{1}{1+z^n}$. Die Singularitäten von f sind die Pole erster Ordnung

$$\zeta^{2k+1} \quad \text{für } 0 \leq k \leq n-1,$$

wobei $\zeta := e^{i\frac{\pi}{n}}$. Wir berechnen die Residuen mit Hilfe von Aufgabe 3 b) von Blatt 11

$$\operatorname{Res}(f, \zeta^{2k+1}) = \frac{1}{n(\zeta^{2k+1})^{n-1}} = \frac{\zeta^{2k+1}}{n(\zeta^{2k+1})^n} = -\frac{1}{n}\zeta^{2k+1}.$$

Sei $r > 0$. Sei weiter γ_1 die Strecke $[-r, r]$ und γ_2 der Halbkreisbogen auf $\partial B_r(0)$ auf der oberen Halbebene von r nach $-r$. Schließlich sei γ der geschlossene Weg von und nach $-r$, der durch Verbindung von γ_1 und γ_2 gegeben ist.

Die Kurve γ umrandet ein Gebiet mit den Polen ζ^{2k+1} für $0 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$. Wir berechnen mit Hilfe des Residuensatzes

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,dz &= 2\pi i \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \operatorname{Res}(f, \zeta^{2k+1}) \\
&= -\frac{2}{n}\pi i \zeta \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \zeta^{2k} \\
&= -\frac{2}{n}\pi i \zeta \frac{1-\zeta^n}{1-\zeta^2} \\
&= -\frac{4}{n}\pi i \frac{1}{\zeta^{-1}-\zeta} \\
&= -\frac{4}{n}\pi i \frac{1}{2i\operatorname{Im}(\zeta^{-1})} \\
&= \frac{2}{n}\pi \left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\int_{-r}^{r} f(x)\,dx &= \int_\gamma f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz \\
&= \frac{2}{n}\pi \left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^{-1} - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz,
\end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| &\leq \pi r \cdot \frac{1}{r^2} \\
&\longrightarrow 0 \quad \text{für } r \to \infty.
\end{aligned}$$

Mit $r \to \infty$ erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{2}{n}\pi \left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^{-1}.$$

Da f auf $\mathbb{R}$ eine gerade Funktion ist, erhalten wir schließlich

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^{-1}.$$

- Sei nun $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Setze $\zeta := e^{i\pi/n}$. Es folgt $(x\zeta^2)^n = x^n$. Sei $\gamma_1 = [0, r]$, $\gamma_2 = re^{i\varphi}$ für $0 \leq \varphi \leq 2\pi/n$ und γ_3 die Strecke von $r\zeta^2$ nach 0. Ferner sei $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$, also die Verbindung der drei Wege. Die Funktion $\frac{1}{1+z^n}$ hat die n Pole erster Ordnung $e^{i(2k+1)\pi/n}$, $0 \leq k \leq n-1$. Von diesen Polen liegt nur $\zeta = e^{i\pi/n}$ innerhalb von γ. Mit Aufgabe 3 b) von Blatt 11 berechnen wir für $f(z) = \frac{1}{1+z^n}$

$$\mathrm{Res}(f, e^{i\pi/n}) = \frac{1}{ne^{i\pi(n-1)/n}} = \frac{e^{i\pi/n}}{ne^{i\pi}} = -\frac{1}{n}e^{i\pi/n}.$$

Für $r > 1$ folgt mit dem Residuensatz

$$\int_{\gamma} \frac{1}{1+z^n}\,dz = -\frac{2}{n}\pi i\zeta.$$

Wegen $(x\zeta^2)^n = x^n$ und nach Definition von γ_3 gilt

$$\int_{\gamma_3} \frac{1}{1+z^n}\,dz = -\zeta^2 \int_{\gamma_1} \frac{1}{1+z^n}\,dz.$$

Lassen wir r gegen ∞ gehen, so verschwindet das Integral über γ_2 und wir erhalten

$$(1-\zeta^2)\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^n}\,dx = -\frac{2}{n}\pi i\zeta,$$

also wie oben

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^n}\,dx &= -\frac{2}{n}\pi i\frac{\zeta}{1-\zeta^2}\\ &= \frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^{-1}.\end{aligned}$$