Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

SS 2013
08.07.2013

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

13. Übungsblatt (letztes Blatt)

Aufgabe 1

Die 2π-periodischen Funktionen f, g und h sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
f(x) &= \tfrac{1}{2}x^2 & &(-\pi \le x < \pi), & f(x+2\pi) &= f(x),\\
g(x) &= 1 + x + |x| & &(-\pi \le x < \pi), & g(x+2\pi) &= g(x),\\
h(x) &= \cos(\tfrac{1}{2}x) & &(-\pi \le x < \pi), & h(x+2\pi) &= h(x).
\end{aligned}$$

Berechnen Sie die Fourierreihen dieser Funktionen in reeller und komplexer Form.

Aufgabe 2

Ist $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{\sqrt{k}}$ die Fourierreihe einer Funktion $f \in R_{\text{per}}$?

Hinweis: Argumentieren Sie mit der Besselschen Ungleichung.

Aufgabe 3

a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare und 2π-periodische Funktion. Zeigen Sie, dass für die Fourierkoeffizienten der Ableitung f' gilt:

$$\widehat{(f')}(k) = ik\hat{f}(k) \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

b) Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ eine 2π-periodische Funktion. Zeigen Sie, dass für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| k^N \hat{f}(k) \right| < \infty.$$

Aufgabe 4

Berechnen Sie jeweils die Fouriertransformierte $\mathfrak{F}f$ der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{für } |x| > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = xe^{-|x|}$

c) $f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{für } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{für } 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4x + 5}$

f) $f(x) = \dfrac{x}{x^4 + 2x^2 + 1}$

Aufgabe 5

Berechnen Sie mit Hilfe von Aufgabe 4 a) und des Satzes von Plancherel

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}\, dx \,.$$