Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

SS 2013
08.07.2013

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

13. Übungsblatt (letztes Blatt)

Notation auf diesem Blatt: Ist f eine 2π-periodische, über $[-\pi,\pi]$ Riemann-integrierbare Funktion, und ist $k \in \mathbb{Z}$, so ist der k-te Fourierkoeffizient

$$\hat{f}(k) := c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx.$$

Aufgabe 1

Die 2π-periodischen Funktionen f, g und h sind gegeben durch

$$\begin{array}{rcllr} f(x) & = & \frac{1}{2}x^2 & (-\pi \le x < \pi), & f(x+2\pi) = f(x), \\ g(x) & = & 1 + x + |x| & (-\pi \le x < \pi), & g(x+2\pi) = g(x), \\ h(x) & = & \cos(\frac{1}{2}x) & (-\pi \le x < \pi), & h(x+2\pi) = h(x). \end{array}$$

Berechnen Sie die Fourierreihen dieser Funktionen in reeller und komplexer Form.

Lösung:
Für die Fourierkoeffizienten von f berechnet man

$$\hat{f}(0) = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{und} \qquad \hat{f}(k) = \frac{(-1)^k}{k^2} \quad \text{für } k \neq 0.$$

Somit lautet die Fourierreihe von f in komplexer Form

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx} = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}\, e^{ikx}\,.$$

Die Koeffizienten a_k und b_k in der reellen Darstellung der Fourierreihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\big)$$

kann man folgendermaßen gewinnen

$$a_k = \hat{f}(k) + \hat{f}(-k) \quad (k \in \mathbb{N}_0) \qquad \text{und} \qquad b_k = i\big(\hat{f}(k) - \hat{f}(-k)\big) \quad (k \in \mathbb{N})\,.$$

In unserem Falle ergibt sich $b_k = 0$ $(k \in \mathbb{N})$ und $a_k = \begin{cases} \frac{\pi^2}{3} & \text{für } k = 0 \\ \frac{2(-1)^k}{k^2} & \text{für } k \neq 0 \end{cases}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$.

Bemerkung: (1) Da f auf $\mathbb{R}$ stetig und stückweise glatt ist, stellt die Fourierreihe von f nach dem Darstellungssatz die Funktion f in allen Punkten $x \in \mathbb{R}$ dar.
(2) Aus der Linearität des Integrals folgt: Sind $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $f_1, f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodische Funktionen, die über $[-\pi, \pi]$ integrierbar sind, so gilt für die Fourierkoeffizienten von $\alpha f_1 + \beta f_2$

$$c_k(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha c_k(f_1) + \beta c_k(f_2) \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

Eine entsprechende Aussage gilt auch für die Fourierkoeffizienten der reellen Fourierreihe:

$$\begin{aligned} a_k(\alpha f_1 + \beta f_2) &= \alpha a_k(f_1) + \beta a_k(f_2) \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0, \\ b_k(\alpha f_1 + \beta f_2) &= \alpha b_k(f_1) + \beta b_k(f_2) \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Nun zu g: Wegen $g(x) = 1$ für $x \in [-\pi, 0)$ und $g(x) = 1 + 2x$ für $x \in [0, \pi)$ folgt für jedes $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \hat{g}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} e^{-ikx}\, dx + \int_0^{\pi} (1 + 2x) e^{-ikx}\, dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}\, dx + \int_0^{\pi} 2x e^{-ikx}\, dx \right); \end{aligned}$$

für $k = 0$ erhalten wir $\hat{g}(0) = \frac{1}{2\pi}(2\pi + \pi^2) = 1 + \frac{\pi}{2}$; sonst gilt (partielle Integration)

$$\begin{aligned} \hat{g}(k) &= 0 + \frac{1}{\pi} \left(x \cdot \frac{e^{-ikx}}{-ik} \bigg|_{x=0}^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{e^{-ikx}}{-ik}\, dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi(-1)^k}{-ik} - \frac{e^{-ikx}}{(-ik)^2} \bigg|_{x=0}^{\pi} \right) \\ &= \frac{i(-1)^k}{k} - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{(-1)^k - 1}{-k^2} = \frac{i(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}. \end{aligned}$$

Damit ist die Fourierreihe von g

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{g}(k) e^{ikx} = 1 + \frac{\pi}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{i(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} \right) e^{ikx}.$$

Als Koeffizienten in der reellen Form der Fourierreihe $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ erhält man

$$a_0 = 2 + \pi, \quad a_k = \hat{g}(k) + \hat{g}(-k) = \frac{2((-1)^k - 1)}{\pi k^2} \;\text{ sowie }\; b_k = i(\hat{g}(k) - \hat{g}(-k)) = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}.$$

Nun zur Funktion h: Wir berechnen zunächst die Koeffizienten der rellen Darstellung der Fourierreihe. Es gilt (substituiere $y = -x$):

$$\int_{-\pi}^{0} \cos(\tfrac{1}{2}x) \sin(kx)\, dx = -\int_{\pi}^{0} \cos(-\tfrac{1}{2}y) \sin(-ky)\, dx = \int_{\pi}^{0} \cos(\tfrac{1}{2}y) \sin(ky)\, dy = -\int_0^{\pi} \cos(\tfrac{1}{2}y) \sin(ky)\, dy$$

und folglich

$$b_k = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\tfrac{1}{2}x) \sin(kx)\, dx = \int_{-\pi}^{0} \cos(\tfrac{1}{2}x) \sin(kx)\, dx + \int_0^{\pi} \cos(\tfrac{1}{2}x) \sin(kx)\, dx = 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \cos(kx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\tfrac{1}{2}x) \cos(kx)\, dx.$$

Zweimalige partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}
I_k &:= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\tfrac{1}{2}x) \cos(kx)\, dx \\
&= \big[2\sin(\tfrac{1}{2}x)\cos(kx)\big]_{x=-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2\sin(\tfrac{1}{2}x)(-k\sin(kx))\, dx \\
&= 2\big(\cos(k\pi) + \cos(-k\pi)\big) + 2k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\tfrac{1}{2}x)\sin(kx)\, dx \\
&= 4(-1)^k + 2k\left(\big[-2\cos(\tfrac{1}{2}x)\sin(kx)\big]_{x=-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -2\cos(\tfrac{1}{2}x)(k\cos(kx))\, dx \right) \\
&= 4(-1)^k - 0 + 4k^2 I_k.
\end{aligned}$$

Somit haben wir die Gleichung $I_k = 4(-1)^k + 4k^2 I_k$; dies bedeutet $I_k = 4(-1)^k/(1-4k^2)$. Damit kennen wir $a_k = I_k/\pi$ und es ergibt sich die Fourierreihe von h in reeller Form

$$\frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{(1-4k^2)\pi} \cos(kx)\,.$$

Hieraus kann man die Fourierkoeffizienten $\hat{h}(k)$ berechnen (setze $b_0 := 0$)

$$\hat{h}(k) = \frac{a_k - ib_k}{2} = \frac{a_k}{2} = \frac{2(-1)^k}{(1-4k^2)\pi} \qquad \text{und} \qquad \hat{h}(-k) = \frac{a_k + ib_k}{2} = \frac{a_k}{2} = \frac{2(-1)^k}{(1-4k^2)\pi} \qquad (k \in \mathbb{N}_0)$$

Daher lautet die Fourierreihe von h in komplexer Form

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{(1-4k^2)\pi} e^{ikx}\,.$$

Aufgabe 2

Ist $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{\sqrt{k}}$ die Fourierreihe einer Funktion $f \in R_{\text{per}}$?

Hinweis: Argumentieren Sie mit der Besselschen Ungleichung.

Lösung:

Angenommen, es existiert eine Funktion $f \in R_{\text{per}}$, deren reelle Fourierkoeffizienten gegeben sind durch $a_k = 0$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ und $b_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$ $(k \in \mathbb{N})$. Nach der Besselschen Ungleichung folgt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(k)\right|^2 \le \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx < \infty.$$

Für die Fourierkoeffizienten gilt: $\hat{f}(0) = 0$, $\hat{f}(k) = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) = -\frac{i}{2\sqrt{k}}$ und $\hat{f}(-k) = \frac{1}{2}(a_k + ib_k) = \frac{i}{2\sqrt{k}}$ $(k \in \mathbb{N})$, und wir erhalten

$$\infty > \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(k)\right|^2 = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=-K}^{K} \left|\hat{f}(k)\right|^2 = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K} \left(\left|\hat{f}(k)\right|^2 + \left|\hat{f}(-k)\right|^2\right) = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2k},$$

d.h. die Konvergenz der harmonischen Reihe. Dies ist ein Widerspruch! Deshalb existiert keine Funktion $f \in R_{\text{per}}$, welche die Fourierreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{\sqrt{k}}$ besitzt.

Aufgabe 3

a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare und 2π-periodische Funktion. Zeigen Sie, dass für die Fourierkoeffizienten der Ableitung f' gilt:

$$\widehat{(f')}(k) = ik\hat{f}(k) \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

b) Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ eine 2π-periodische Funktion. Zeigen Sie, dass für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \left|k^N \hat{f}(k)\right| < \infty.$$

Lösung:

a) Für $k = 0$ gilt wegen der 2π-Periodizität von f:

$$\widehat{(f')}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, dx = \frac{f(\pi) - f(-\pi)}{2\pi} = 0 = i \cdot 0 \cdot \hat{f}(0).$$

Für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ erhalten wir mit Hilfe von partieller Integration

$$\widehat{(f')}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\left[f(x)e^{-ikx}\right]_{x=-\pi}^{\pi}}_{= 0,\text{ da } 2\pi\text{-per.}} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) ike^{-ikx}\, dx = ik\hat{f}(k).$$

b) Sei $N \in \mathbb{N}$. Wenden wir die Formel aus a) für die Fourierkoeffizienten von $f^{(N)}$ N-mal an (beachte, dass $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, also insbesondere $f^{(n)}$ stetig differenzierbar für jedes $n \in \mathbb{N}$), so erhalten wir:

$$\widehat{(f^{(N)})}(k) = ik\widehat{(f^{(N-1)})}(k) = (ik)^2\widehat{(f^{(N-2)})}(k) = \ldots = (ik)^N \hat{f}(k) \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Wegen $f^{(N)} \in R_{\text{per}}$ gilt $\sup_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{(f^{(N)})}(k)| < \infty$ $(*)$, und somit

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k) k^N| = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{(f^{(N)})}(k) < \infty.$$

Bemerkung: Insbesondere gilt für jedes $N \in \mathbb{N}$: Es gibt eine Konstante $C = C(N)$ mit $|\hat{f}(k)| \leq \frac{C}{|k|^N}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, d.h. die Folge $(|\hat{f}(k)|)_{k\in\mathbb{Z}}$ konvergiert schneller als jede Potenz von $1/|k|$ gegen 0.

Zu $(*)$: Wir schreiben $\gamma_k := \widehat{(f^{(N)})}(k)$. Da $f \in C^\infty$ folgt die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_k|^2$. Dies impliziert wiederum die Beschränktheit der Folge $(|\gamma_k|^2)_{k\in\mathbb{Z}}$, also auch die Beschränktheit von $(|\gamma_k|)_{k\in\mathbb{Z}}$, was gleichbedeutend zu $\sup_{k\in\mathbb{Z}} |\gamma_k| < \infty$ ist.

Aufgabe 4

Berechnen Sie jeweils die Fouriertransformierte $\mathfrak{F}f$ der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{für } |x| > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = xe^{-|x|}$

c) $f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{für } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{für } 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4x + 5}$

f) $f(x) = \dfrac{x}{x^4 + 2x^2 + 1}$

Lösung:

a) Für $\xi \neq 0$ gilt

$$\mathfrak{F}f(\xi) = \int_{-1}^{1} e^{-i\xi x}\, dx = \left[\frac{1}{-i\xi}\, e^{-i\xi x}\right]_{x=-1}^{1} = \frac{1}{i\xi}\big(e^{i\xi} - e^{-i\xi}\big) = 2\,\frac{\sin(\xi)}{\xi}\,.$$

Für $\xi = 0$ ist

$$\mathfrak{F}f(0) = \int_{-1}^{1} 1\, dx = 2\,.$$

b) Definitionsgemäß gilt für alle $\xi \in \mathbb{R}$

$$\mathfrak{F}f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x)\, dx = \int_{0}^{\infty} xe^{-x}e^{-i\xi x}\, dx + \int_{-\infty}^{0} xe^{x}e^{-i\xi x}\, dx\,.$$

Wegen $\int xe^{\alpha x}\, dx = xe^{\alpha x}/\alpha - \int e^{\alpha x}/\alpha\, dx = xe^{\alpha x}/\alpha - e^{\alpha x}/\alpha^2$ erhält man für $c > 0$

$$\begin{aligned}\int_0^c xe^{-x}e^{-i\xi x}\, dx = \int_0^c xe^{-x(1+i\xi)}\, dx &= \left[\frac{xe^{-x(1+i\xi)}}{-(1+i\xi)} - \frac{e^{-x(1+i\xi)}}{(1+i\xi)^2}\right]_{x=0}^{c} \\ &= \left(\frac{ce^{-c(1+i\xi)}}{-(1+i\xi)} - \frac{e^{-c(1+i\xi)}}{(1+i\xi)^2}\right) - \left(0 - \frac{1}{(1+i\xi)^2}\right) \xrightarrow{c\to\infty} \frac{1}{(1+i\xi)^2}\,,\end{aligned}$$

wobei man $|e^{-c(1+i\xi)}| = e^{-c}$ beachten muss. Für das zweite Integral ergibt sich analog $\int_{-\infty}^{0} xe^{x(1-i\xi)}\, dx = \int_0^\infty (-\tau)e^{-\tau(1-i\xi)}\, d\tau = -(1-i\xi)^{-2}$, d.h. wir haben

$$\mathfrak{F}f(\xi) = \frac{1}{(1+i\xi)^2} - \frac{1}{(1-i\xi)^2} = \frac{(1-i\xi)^2 - (1+i\xi)^2}{(1+\xi^2)^2} = \frac{-4i\xi}{(1+\xi^2)^2}\,.$$

Alternativ: Da $x \mapsto xe^{-|x|}$ absolut integrierbar ist, ist $\mathfrak{F}\{e^{-|x|}\}$ differenzierbar und für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{d}{d\xi}\mathfrak{F}\{e^{-|x|}\}(\xi) = \mathfrak{F}\{(-ix)e^{-|x|}\}(\xi) = -i\mathfrak{F}\{xe^{-|x|}\}(\xi)$$

bzw.

$$\mathfrak{F}\{xe^{-|x|}\}(\xi) = i\,\frac{d}{d\xi}\mathfrak{F}\{e^{-|x|}\}(\xi) \overset{\text{Bsp. in 23.4}}{=} i\,\frac{d}{d\xi}\frac{2}{1+\xi^2} = \frac{-4i\xi}{(1+\xi^2)^2}\,.$$

c) Wegen $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$, $x \in \mathbb{R}$, ergibt sich für jedes $\xi \in \mathbb{R}$

$$\mathfrak{F}f(\xi) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-i\xi x}\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\big(e^{i(1-\xi)x} + e^{-i(1+\xi)x}\big)\,dx\,.$$

Für $\xi \neq \pm 1$ bekommen wir

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}f(\xi) &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{i(1-\xi)}\,e^{i(1-\xi)x} - \frac{1}{i(1+\xi)}\,e^{-i(1+\xi)x}\right]_{x=-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{i(1-\xi)}\Big(e^{i(1-\xi)\frac{\pi}{2}} - e^{-i(1-\xi)\frac{\pi}{2}}\Big) - \frac{1}{2}\frac{1}{i(1+\xi)}\Big(e^{-i(1+\xi)\frac{\pi}{2}} - e^{i(1+\xi)\frac{\pi}{2}}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{1-\xi}\Big(e^{-i\xi\frac{\pi}{2}} + e^{i\xi\frac{\pi}{2}}\Big) - \frac{1}{2}\frac{1}{1+\xi}\Big(-e^{-i\xi\frac{\pi}{2}} - e^{i\xi\frac{\pi}{2}}\Big) \\
&= \frac{\frac{1}{2}(1+\xi)(e^{-i\xi\frac{\pi}{2}} + e^{i\xi\frac{\pi}{2}}) - \frac{1}{2}(1-\xi)(-e^{-i\xi\frac{\pi}{2}} - e^{i\xi\frac{\pi}{2}})}{1-\xi^2} \\
&= \frac{2\,\frac{1}{2}(e^{-i\xi\frac{\pi}{2}} + e^{i\xi\frac{\pi}{2}})}{1-\xi^2} = \frac{2\cos(\xi\frac{\pi}{2})}{1-\xi^2}\,.
\end{aligned}$$

Im Fall $\xi = 1$ ist

$$\mathfrak{F}f(1) = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\big(1 + e^{-2ix}\big)\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-2i}\,e^{-2ix}\right]_{x=-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

und für $\xi = -1$ gilt

$$\mathfrak{F}f(-1) = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\big(e^{2ix} + 1\big)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2i}\,e^{2ix}\right]_{x=-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\,.$$

d) Ist

$$g(x) := \begin{cases} \cos(x) & \text{für } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

gesetzt, dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ (vgl. Additionstheorem des cos)

$$\begin{aligned}
g(x - \pi/2) &= \begin{cases} \cos(x - \frac{\pi}{2}) & \text{für } -\frac{\pi}{2} \le x - \frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} \sin(x) & \text{für } 0 \le x \le \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
&= f(x)\,.
\end{aligned}$$

Es folgt für alle $\xi \in \mathbb{R}$

$$\mathfrak{F}f(\xi) = \mathfrak{F}\{g(x - \tfrac{\pi}{2})\}(\xi) = e^{-i\xi\frac{\pi}{2}}\mathfrak{F}g(\xi)\,.$$

Gemäß c) gilt für $\xi \neq \pm 1$

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}f(\xi) &= e^{-i\xi\frac{\pi}{2}}\mathfrak{F}g(\xi) = e^{-i\xi\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos(\frac{\pi}{2}\xi)}{1-\xi^2} = e^{-i\xi\frac{\pi}{2}}\left(e^{i\frac{\pi}{2}\xi} + e^{-i\frac{\pi}{2}\xi}\right)\frac{1}{1-\xi^2} \\ &= \left(1 + e^{-i\pi\xi}\right)\frac{1}{1-\xi^2}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}f(1) &= e^{-i\cdot 1\cdot\frac{\pi}{2}}\mathfrak{F}g(1) = -i\,\frac{\pi}{2}\,, \\ \mathfrak{F}f(-1) &= e^{-i\cdot(-1)\cdot\frac{\pi}{2}}\mathfrak{F}g(-1) = i\,\frac{\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

e) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 5} = \frac{1}{(x+2)^2 + 1} = g(x+2)$$

mit

$$g(x) := \frac{1}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Wir berechnen zunächst $\mathfrak{F}g$ und argumentieren zur Bestimmung von $\mathfrak{F}f$ mit der Verschiebungsregel der Fouriertransformation.

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass für die Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) := e^{-|x|}$, gilt

$$\mathfrak{F}h(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}\,, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Gesucht ist also $\mathfrak{F}g = \frac{1}{2}\mathfrak{F}\{\mathfrak{F}h\}$. h ist stetig, beschränkt und absolut integrierbar. Ferner ist $\mathfrak{F}h$ absolut integrierbar, denn $\int_{-\infty}^{\infty} |\mathfrak{F}h(\xi)|\,d\xi = 2\int_0^{\infty}\frac{1}{1+\xi^2}\,d\xi = 2\lim_{b\to\infty}[\arctan\xi]_0^b = \pi$. Damit sind die Voraussetzungen der Fourierinversionsformel für h erfüllt. Diese besagt

$$h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\mathfrak{F}h(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\,\mathfrak{F}\{\mathfrak{F}h\}(-x) \qquad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}.$$

Zusammenfassend haben wir

$$\mathfrak{F}g(\xi) = \frac{1}{2}\,\mathfrak{F}\{\mathfrak{F}h\}(\xi) = \frac{1}{2}\,2\pi\,h(-\xi) = \pi\,e^{-|-\xi|} = \pi\,e^{-|\xi|}\,, \qquad \xi \in \mathbb{R}. \qquad (*)$$

Schließlich liefert die Verschiebungsregel

$$\mathfrak{F}f(\xi) = \mathfrak{F}\{g(x+2)\}(\xi) = e^{-i\xi(-2)}\mathfrak{F}g(\xi) \overset{(*)}{=} \pi\,e^{2i\xi - |\xi|}\,, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

f) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = \frac{x}{x^4 + 2x^2 + 1} = -\frac{1}{2} \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{2} g'(x)\,,$$

wobei g wie im e)-Teil definiert ist.

Da g stetig, differenzierbar und absolut integrierbar sowie g' stetig und absolut integrierbar ist, gilt

$$\mathfrak{F}f(\xi) = -\frac{1}{2} \mathfrak{F}g'(\xi) = -\frac{1}{2} i\xi\, \mathfrak{F}g(\xi) \overset{(*)}{=} -\frac{1}{2} i\xi\pi\, e^{-|\xi|}\,.$$

Aufgabe 5

Berechnen Sie mit Hilfe von Aufgabe 4 a) und des Satzes von Plancherel

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}\, dx\,.$$

Lösung:

Sei $f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{für } |x| > 1 \end{cases}$. Wie in Aufgabe 4 a) gesehen, gilt für die Fouriertransformierte von f

$$\mathfrak{F}f(\xi) = \begin{cases} 2\,\frac{\sin(\xi)}{\xi} & \text{für } \xi \neq 0\,, \\ 2 & \text{für } \xi = 0\,. \end{cases}$$

Wir verwenden den Satz von Plancherel: Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig, absolut integrierbar und gilt $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx < \infty$, so ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathfrak{F}f(\xi)|^2\, d\xi\,.$$

Für die oben definierte Funktion f sind die Voraussetzungen erfüllt; also gilt

$$2 = \int_{-1}^{1} 1\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathfrak{F}f(\xi)|^2\, d\xi = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\xi)}{\xi^2}\, d\xi$$

bzw.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\xi)}{\xi^2}\, d\xi = \pi\,.$$

Da $\xi \mapsto \frac{\sin^2(\xi)}{\xi^2}$ eine gerade Funktion ist (denn $\frac{\sin^2(-\xi)}{(-\xi)^2} = \frac{(-\sin(\xi))^2}{\xi^2} = \frac{\sin^2(\xi)}{\xi^2}$), ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\xi)}{\xi^2}\, d\xi = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin^2(\xi)}{\xi^2}\, d\xi$$

und damit

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2(\xi)}{\xi^2}\, d\xi = \frac{\pi}{2}\,.$$