Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

SS 2015
13.04.2015

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

1. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Übung)

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Es gilt

$$\operatorname{Bild}(A)^{\perp} = \operatorname{Kern}(A^*).$$

Hinweis: Ist V ein Vektorraum mit Skalarprodukt, so ist für $M \subseteq V$ der *Orthogonalraum* von M gegeben durch $M^{\perp} = \{v \in V : v \perp w \; \forall w \in M\}$.

b) Gilt $(Ax|x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$, so ist

$$\operatorname{Bild}(A) \perp \operatorname{Kern}(A).$$

Hinweis: Ist V ein Vektorraum mit Skalarprodukt, so sind $M, N \subseteq V$ orthogonal bzw. $M \perp N :\Leftrightarrow \forall x \in M, y \in N : x \perp y$.

Aufgabe 2 (Tutorium)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)$. Weiter seien Vektoren $v, w, u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n \in V$ sowie Skalare $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ $(n, m \in \mathbb{N})$ gegeben. Zeigen Sie, dass

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i \Big| \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j \right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_j} \left(u_i | v_j\right).$$

Sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ nun eine Orthonormalbasis von V. Beweisen Sie die Formeln

a) $(v|w) = \sum_{i=1}^{n} (v|v_i)\overline{(w|v_i)}$.

b) $(v|v) = \sum_{i=1}^{n} |(v|v_i)|^2$.

Aufgabe 3 (Übung)

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Zeigen Sie:

a) Das neutrale Element e ist eindeutig bestimmt.

b) Das zu $a \in G$ inverse Element a^{-1} ist eindeutig bestimmt.

c) Sind $a, b \in G$, so lassen sich die Gleichungen $ax = b$ bzw. $xa = b$ eindeutig durch $x = a^{-1}b$ bzw. $x = ba^{-1}$ lösen.

Aufgabe 4 (Tutorium)

Es sei
$$G := \{\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}.$$
Zeigen Sie, dass G versehen mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe ist.

Aufgabe 5 (Übung)

Es sei $V = P[-1,1]$ der Vektorraum der reellen Polynomfunktionen auf $[-1,1]$ und $p_m \in V$ definiert durch
$$p_m(x) = x^m$$
für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und $x \in [-1,1]$. Ferner sei die Abbildung $(\cdot|\cdot) : V^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch
$$(p|q) = \int_{-1}^{1} \frac{p(y)q(y)}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y$$
für alle $p,q \in V$. Zeigen Sie, dass durch $(\cdot|\cdot)$ ein Skalarprodukt auf V definiert ist und wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren bezüglich $(\cdot|\cdot)$ auf $\{p_0, p_1, p_2\}$ an.

Aufgabe 6 (Tutorium)

a) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von $U = \operatorname{lin}(\{v_1, v_2, v_3\}) \subseteq \mathbb{R}^5$, die Orthogonalprojektion Px von x auf U, sowie den Abstand $d(x,U) = \min_{y\in U} \|x-y\|$ mit
$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$$

b) Lösen Sie **Aufgabe 5** mit dem (bekannten) Skalarprodukt $(p|q) = \int_{-1}^{1} p(y)q(y)\,\mathrm{d}y$.

Allgemeine Informationen

- Webseite zur Vorlesung: `http://www.math.kit.edu/iana3/lehre/hm2phys2015s/`.
- Sprechzeiten von Dr. Schmoeger: Dienstags, 10-11 Uhr (Raum 2.046, **Geb. 20.30**) oder nach Vereinbarung per E-Mail (christoph.schmoeger@kit.edu).
- Sprechzeiten von Sebastian Schwarz: Mittwochs, 14-16 Uhr (Raum 2.043, **Geb. 20.30**) oder nach Vereinbarung per E-Mail (sebastian.schwarz@kit.edu).

Übungsbetrieb

- **WICHTIG**: **Anmeldung** für die **Tutorien** bis zum **17.04.2015** um **20 Uhr** unter **`http://www.redseat.de/kit-phys/`**. Die Einteilung wird am Samstag, den 18.04.2015, per E-Mail verschickt.
- Übungsblätter erscheinen wöchentlich (montags) auf obiger Webseite. Sie umfassen den Stoff der aktuellen Woche und werden zum Teil freitags in der Übung, zum Teil in den Tutorien der folgenden Woche besprochen.

Klausur

- Eine **Übungsklausur** (Anmeldung für Studenten mit Scheinpflicht bei Dr. Nagato-Plum, Raum 2.029, **Geb. 20.30**) findet am **04.07.2015** von **9 bis 11 Uhr** statt.
- Die **Modulprüfung HM I** findet am **17.09.2015** von **8 bis 10 Uhr** statt. Die **Modulprüfung HM II** findet am **18.09.2015** von **9 bis 11 Uhr** statt.