Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

SS 2015
13.04.2015

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Übung)

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Es gilt

$$\text{Bild}(A)^{\perp} = \text{Kern}(A^*).$$

Hinweis: Ist V ein Vektorraum mit Skalarprodukt, so ist für $M \subseteq V$ der *Orthogonalraum* von M gegeben durch $M^{\perp} = \{v \in V : v \perp w \ \forall w \in M\}$.

b) Gilt $(Ax|x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$, so ist

$$\text{Bild}(A) \perp \text{Kern}(A).$$

Hinweis: Ist V ein Vektorraum mit Skalarprodukt, so sind $M, N \subseteq V$ orthogonal bzw. $M \perp N :\Leftrightarrow \forall x \in M, y \in N : x \perp y$.

Lösungsvorschlag

a) Wir zeigen zunächst, dass in jedem $\mathbb{K}$-Vektorraum V für alle $x \in V$

$$\forall y \in V : (x|y) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

gilt.

Beweis: $\Rightarrow$: Wähle $y = x$, dann ist $(x|x) = 0$. Das ist nach Eigenschaft (S3) (vgl. Abschnitt 15.1 der Vorlesung) nur für $x = 0$ möglich.

$\Leftarrow$: Sei $y \in V$ beliebig. Es gilt $(0|y) = (y - y|y) = (y|y) - (y|y) = 0$.

Nun gilt:

$$\begin{aligned} x \in \text{Bild}(A)^{\perp} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall z \in \text{Bild}(A) : (x|z) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall y \in \mathbb{K}^n : (x|Ay) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall y \in \mathbb{K}^n : (A^*x|y) = 0 \end{aligned}$$

Die letzte Aussage ist nach Obigem äquivalent zu $A^*x = 0$. Dies ist wiederum äquivalent zu $x \in \text{Kern}(A^*)$.

b) Seien $y \in \text{Kern}(A)$ und $z \in \text{Bild}(A)$ beliebig. Es ist $(z|y) = 0$ zu zeigen. Da $z \in \text{Bild}(A)$, existiert ein $x \in \mathbb{K}^n$ mit $Ax = z$. Es gilt:

$$\begin{aligned} (z|y) &= (Ax|y) = (Ax + 0|y) \overset{y \in \text{Kern}(A)}{=} (Ax + Ay|y) = (A(x+y)|x + y - x) \\ &= (A(x+y)|(x+y)) - (Ax + Ay|x) \overset{\text{Voraus.}}{=} (Ax + Ay|x) \overset{y \in \text{Kern}(A)}{=} (Ax|x) \overset{\text{Voraus.}}{=} 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Tutorium)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)$. Weiter seien Vektoren $v, w, u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n \in V$ sowie Skalare $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$ ($n, m \in \mathbb{N}$) gegeben. Zeigen Sie, dass

$$\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i \Big| \sum_{j=1}^n \beta_j v_j\right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_i \overline{\beta_j} \left(u_i | v_j\right).$$

Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ nun eine Orthonormalbasis von V. Beweisen Sie die Formeln

a) $(v|w) = \sum_{i=1}^n (v|v_i)\overline{(w|v_i)}$.

b) $(v|v) = \sum_{i=1}^n |(v|v_i)|^2$.

Lösungsvorschlag

Durch die Eigenschaften des Skalarprodukts ist die erste Formel leicht einzusehen, den rigorosen Beweis liefert eine kleine Induktion. Wir zeigen zunächst, dass für $m \in \mathbb{N}$ und $u \in V$ beliebig

$$\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i \Big| u\right) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \left(u_i | u\right).$$

Induktionsanfang (m=1): Auf beiden Seiten der Gleichung steht exakt derselbe Ausdruck.
Induktionsschritt: Die Formel gelte für ein $m \in \mathbb{N}$ (IV). Dann folgt

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i u_i \Big| u\right) &= \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i + \alpha_{m+1} u_{m+1} \Big| u\right) \overset{(S2)}{=} \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i \Big| u\right) + \alpha_{m+1}\left(u_{m+1}|u\right) \\ &\overset{\text{IV}}{=} \sum_{i=1}^m \alpha_i \left(u_i|u\right) + \alpha_{m+1}\left(u_{m+1}|u\right) = \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i \left(u_i|u\right)\end{aligned}$$

Nun folgt mit dieser Formel und (S1), dass

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i \Big| \sum_{j=1}^n \beta_j v_j\right) &= \sum_{i=1}^m \alpha_i \left(u_i \Big| \sum_{j=1}^n \beta_j v_j\right) \overset{(S1)}{=} \sum_{i=1}^m \alpha_i \overline{\left(\sum_{j=1}^n \beta_j v_j \Big| u_i\right)} \\ &= \sum_{i=1}^m \alpha_i \overline{\sum_{j=1}^n \beta_j \left(v_j | u_i\right)} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_i \overline{\beta_j} \overline{\left(v_j|u_i\right)} \overset{(S1)}{=} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_i \overline{\beta_j}\left(u_i|v_j\right)\end{aligned}$$

Ist $\{v_1, \dots, v_n$ nun eine Orthonormalbasis von V, so lassen sich $v, w \in V$ schreiben als

$$v = \sum_{i=1}^n (v|v_i) v_i, \qquad w = \sum_{j=1}^n \left(w|v_j\right) v_j.$$

Mit Hilfe der bewiesenen Formel ergibt sich nun

a)

$$
\begin{aligned}
(v|w) &= \left(\sum_{i=1}^{n} (v|v_i)\, v_i | \sum_{j=1}^{n} \left(w|v_j\right) v_j \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (v|v_i) \overline{\left(w|v_j\right)} \underbrace{\left(v_i|v_j\right)}_{=\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^{n} (v|v_i) \overline{(w|v_i)}
\end{aligned}
$$

b)

$$
(v|v) \overset{\textbf{a)}}{=} \sum_{i=1}^{n} (v|v_i) \overline{(v|v_i)} = \sum_{i=1}^{n} |(v|v_i)|^2
$$

Aufgabe 3 (Übung)

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Zeigen Sie:

a) Das neutrale Element e ist eindeutig bestimmt.

b) Das zu $a \in G$ inverse Element a^{-1} ist eindeutig bestimmt.

c) Sind $a, b \in G$, so lassen sich die Gleichungen $ax = b$ bzw. $xa = b$ eindeutig durch $x = a^{-1}b$ bzw. $x = ba^{-1}$ lösen.

Lösungsvorschlag

a) Seien e und $\tilde{e}$ zwei neutrale Elemente von G. Dann gilt

$$
e = e\tilde{e} = \tilde{e}.
$$

b) Seien a^{-1} und $\widetilde{a^{-1}}$ zwei inverse Elemente zu $a \in G$. Dann gilt

$$
a^{-1} = a^{-1}e = a^{-1}a\widetilde{a^{-1}} = e\widetilde{a^{-1}} = \widetilde{a^{-1}}.
$$

c) Verknüpfen wir die erste Gleichunge von links und die zweite von rechts mit b^{-1}, so ergibt sich

$$
(b^{-1}a)x = e, \qquad x(ab^{-1}) = e.
$$

Prinzipiell gilt: Ist g^{-1} ein linksinverses ($g^{-1}g = e$) oder rechtsinverses ($gg^{-1} = e$) Element von $g \in G$, so ist g^{-1} bereits das Inverse Element von g. Um dies zu zeigen, sei g^{-1} linksinvers zu g (rechtsinvers analog). Dann ist g^{-1} auch rechtsinvers und somit invers zu g wegen

$$
gg^{-1} = egg^{-1} = ((g^{-1})^{-1}g^{-1})gg^{-1} = (g^{-1})^{-1}(g^{-1}g)g^{-1} = (g^{-1})^{-1}eg^{-1} = (g^{-1})^{-1}g^{-1} = e.
$$

Deshalb ist x im ersten Fall das Inverse von $b^{-1}a$ und im zweiten Fall das Inverse von ab^{-1}. Es gilt

$$
\begin{aligned}
(b^{-1}a)(a^{-1}b) &= b^{-1}(aa^{-1})b = b^{-1}b = e, \\
(ba^{-1})(ab^{-1}) &= b(a^{-1}a)b^{-1} = bb^{-1} = e.
\end{aligned}
$$

Nach **b)** sind Inverse eindeutig bestimmt, womit die Behauptung folgt.

Aufgabe 4 (Tutorium)

Es sei

$$G := \{\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Zeigen Sie, dass G versehen mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe ist.

Lösungsvorschlag

Für $i = 1, 2, 3$ seien $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ und

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 & a_i & b_i \\ 0 & 1 & c_i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G.$$

Zunächst muss gewähreistet sein, dass die Matrixmultiplikation zwei Elemente aus G wieder auf ein Element aus G abbildet. Es gilt

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_1 + a_2 & b_1 + b_2 + a_1 c_2 \\ 0 & 1 & c_1 + c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G.$$

Für die Assoziativität (G1) berufen wir uns auf Satz 14.16 aus HM1, der besagt, dass die Matrizenmultiplikation assoziativ ist. Wir können es aber auch nachrechnen und erhalten

$$(A_1 \cdot A_2) \cdot A_3 = \begin{pmatrix} 1 & a_1 + a_2 + a_3 & b_1 + b_2 + b_3 + a_1 c_2 + a_1 c_3 + a_2 c_3 \\ 0 & 1 & c_1 + c_2 + c_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3).$$

Das Inverse Element (G2) ist gegeben durch die Einheitsmatrix, welche in G liegt. Daran, dass jedes Element in G in seiner Zeilenstufenform vorliegt, erkennen wir, dass dazu ein Inverses bezüglich der Matrizenmultiplikation existiert. Es bleibt zu zeigen, dass dieses Inverse auch in G liegt. Wir berechnen, dass

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \cdot(-c) \\ \cdot(-b) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \cdot(-a) \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -a & ac - b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

womit die rechte Seite, ein Element aus G, das Inverse der Anfangsmatrix ist.

Aufgabe 5 (Übung)

Es sei $V = P[-1, 1]$ der Vektorraum der reellen Polynomfunktionen auf $[-1, 1]$ und $p_m \in V$ definiert durch

$$p_m(x) = x^m$$

für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und $x \in [-1, 1]$. Ferner sei die Abbildung $(\cdot|\cdot) : V^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$(p|q) = \int_{-1}^{1} \frac{p(y) q(y)}{\sqrt{1 - y^2}} \, \mathrm{d}y$$

für alle $p, q \in V$. Zeigen Sie, dass durch $(\cdot|\cdot)$ ein Skalarprodukt auf V definiert ist und wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren bezüglich $(\cdot|\cdot)$ auf $\{p_0, p_1, p_2\}$ an.

Lösungsvorschlag

Dass die Abbildung $(\cdot|\cdot)$ wohldefiniert ist, liegt daran, dass jedes reelle Polynom auf $[-1,1]$ nach oben und unten beschränkt ist, wodurch

$$\begin{aligned}|(p|q)| &\leqslant C\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y = \lim_{b\to -1+}\int_b^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x + \lim_{a\to 1-}\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y \\ &\overset{x=-t}{=} \lim_{b\to 1-}\int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t + \lim_{a\to 1-}\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y = 2\lim_{a\to 1-}\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y \\ &= 2C\lim_{a\to 1-}\left[\arcsin(y)\right]_{y=0}^{y=a} = 2\lim_{a\to 1-}\arcsin(a) = C\pi\end{aligned}$$

Somit ist das uneigentliche Riemannintegral nach dem Majorantenkriterium konvergent. Die Symmetrie (S1) der Abbildung ist nun sofort klar, ebenso wie die Linearität (S2) nach der Linearität des Integrals. Die Positivität (S3) folgt aus **Aufgabe 59 b)** (HMI), da der Integrand in $(p|p)$ positiv und nicht konstant Null ist, wenn p nicht das Nullpolynom ist.
Nun verwenden wir die Notation aus Abschnitt 15.2. Es gilt

$$(p_0|p_0) \quad = \int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y \overset{\text{s.o.}}{=} \pi.$$

Also ist $b_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ für alle $t \in [-1,1]$.
Ferner ist

$$(p_1|b_0) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-1}^{1}\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y.$$

Nach der ersten Rechnung dieser Aufgabe konvergiert das uneigentliche Integral in $(p_1|b_0)$ nach dem Majorantenkriterium. Da der Integrand punktsymmetrisch ist, gilt $(p_1|b_0) = 0$. Des Weiteren ist

$$\begin{aligned}(p_1|p_1) \quad &= \quad \int_{-1}^{1}\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y = \lim_{b\to -1+}\int_b^0 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x + \lim_{a\to 1-}\int_0^a \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y \\ &\overset{x=-t}{=} \quad 2\lim_{a\to 1-}\int_0^a \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y \underset{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\cos(t)}{\overset{y=\sin(t)}{=}} 2\lim_{a\to 1-}\int_0^{\arcsin(a)} \frac{\sin^2(t)\overbrace{\cos(t)}^{>0}}{\sqrt{\cos^2(t)}}\,\mathrm{d}t \\ &= \quad 2\lim_{a\to 1-}\int_0^{\arcsin(a)} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{Hauptsatz}}{=} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{HM1, A57}}{=} \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

In **Aufgabe 57** wurde das Integral über die Potenzen des Kosinus behandelt, durch die Symmetrie gelten für den Sinus jedoch dieselben Werte. Also ist $b_1(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}t$ für alle $t \in [-1,1]$.
Ferner ist

$$(p_2|b_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-1}^{1}\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(p_1|p_1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

und

$$(p_2|b_1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-1}^{1} \frac{y^3}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y.$$

Wie bei $(p_1|b_0)$ sieht man, dass $(p_2|b_1) = 0$ gilt. Für alle $t \in [-1,1]$ gilt also

$$c_2(t) = p_2(t) - (p_2|b_0)\,b_0(t) - (p_2|b_1)\,b_1(t) = t^2 - \frac{1}{2}.$$

Des Weiteren ist

$$\begin{aligned}
(c_2|c_2) &= \int_{-1}^{1} \frac{\left(y^2-\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y - \int_{-1}^{1} \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y + \int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y - (p_1|p_1) + \frac{1}{4}(p_0|p_0) = \int_{-1}^{1} \frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y - \frac{\pi}{4},
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y &= \lim_{b\to -1+} \int_{b}^{0} \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}y + \lim_{a\to 1-} \int_{0}^{a} \frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y \\
&\overset{x=-t}{=} 2\lim_{a\to 1-} \int_{0}^{a} \frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y \underset{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\cos(t)}{\overset{y=\sin(t)}{=}} 2\lim_{a\to 1-} \int_{0}^{\arcsin(a)} \frac{\sin^4(t)\overbrace{\cos(t)}^{>0}}{\sqrt{\cos^2(t)}}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\lim_{a\to 1-} \int_{0}^{\arcsin(a)} \sin^4(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{Hauptsatz}}{=} 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{HM1, A57}}{=} \frac{3\pi}{8},
\end{aligned}$$

also

$$(c_2|c_2) = \frac{\pi}{8}.$$

Somit ist $b_2(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(2t^2-1)$ für alle $t \in [-1,1]$.

Aufgabe 6 (Tutorium)

a) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von $U = \operatorname{lin}(\{v_1, v_2, v_3\}) \subseteq \mathbb{R}^5$, die Orthogonalprojektion Px von x auf U, sowie den Abstand $d(x,U) = \min_{y\in U} \|x-y\|$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad v_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\quad v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\quad x = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$$

b) Lösen Sie **Aufgabe 5** mit dem (bekannten) Skalarprodukt $(p|q) = \int_{-1}^{1} p(y)q(y)\,\mathrm{d}y$.

Lösungsvorschlag

a) Wir berechnen mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens (vgl. Abschnitt 15.2 der Vorlesung) ein Orthonormalsystem $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, welches U erzeugt, wie folgt:

$$\begin{aligned} & & b_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} \\ c_2 &= v_2 - (v_2|b_1)b_1 & b_2 &= \frac{c_2}{\|c_2\|} \\ c_3 &= v_3 - (v_3|b_1)b_1 - (v_3|b_2)b_2 & b_3 &= \frac{c_3}{\|c_3\|} \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\|v_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \qquad \Rightarrow b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$(v_2|b_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1\cdot 2 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0) = \frac{3}{\sqrt{3}} \qquad \Rightarrow c_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$\|c_2\| = \sqrt{3} \qquad \Rightarrow b_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$(v_3|b_1) = \frac{1}{\sqrt{3}},\ (v_3|b_2) = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \Rightarrow c_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\0\\2\\2\\0\end{pmatrix},$$

$$\|c_3\| = \sqrt{\frac{12}{9}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \Rightarrow b_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Nach Abschnitt 15.8 der Vorlesung ist die Orthogonalprojektion Px gegeben durch:

$$Px = (x|b_1)b_1 + (x|b_2)b_2 + (x|b_3)b_3$$

Wir berechnen:

$$(x|b_1) = \frac{7}{\sqrt{3}}, \qquad (x|b_2) = \frac{2}{\sqrt{3}}, \qquad (x|b_3) = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

Es folgt:

$$Px = \frac{7}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{6}{3}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\5\\8\\13\\0\end{pmatrix}$$

Schließlich ist nach Abschnitt 15.8 der Vorlesung:

$$d(x,U) = \min_{y\in U} \|x-y\| = \|x-Px\|$$

Wir berechnen:

$$x - Px = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\5\\8\\13\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\\15\end{pmatrix}, \qquad \|x-Px\| = \frac{\sqrt{228}}{3} \approx 5,03$$

b) Wieder mit der Notation aus dem Abschnitt 15.2 der Vorlesung gilt:

$$(p_0|p_0) = \int_{-1}^{1} 1 \ \mathrm{d}y = 2.$$

Also ist $b_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ für alle $t \in [-1,1]$.
Ferner ist

$$(p_1|b_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1} y \ \mathrm{d}y = 0.$$

Des Weiteren ist

$$(p_1|p_1) = \int_{-1}^{1} y^2 \ \mathrm{d}y = \left[\frac{y^3}{3}\right]_{t=-1}^{t=1} = \frac{2}{3}.$$

Also ist $b_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t$ für alle $t \in [-1,1]$.
Ferner ist

$$(p_2|b_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1} y^2 \ \mathrm{d}y = \frac{\sqrt{2}}{3} \qquad \text{und} \qquad (p_2|b_1) = \sqrt{\frac{3}{2}}\int_{-1}^{1} y^3 \ \mathrm{d}y = 0.$$

Also ist

$$c_2(t) = p_2(t) - (p_2|b_0)\,b_0(t) - (p_2|b_1)\,b_1(t) = t^2 - \frac{1}{3}$$

für alle $t \in [-1,1]$ und wegen

$$(c_2|c_2) = \int_{-1}^{1}\left(y^2 - \frac{1}{3}\right)^2 \mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} y^4 - \frac{2}{3}y^2 + \frac{1}{9}\,\mathrm{d}y = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$$

ist $b_2(t) = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)$ für alle $t \in [-1,1]$.