Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

SS 2015
20.04.2015

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

2. Übungsblatt

Aufgabe 7 (Übung)

a) Berechnen Sie die reellen Fourier-Koeffizienten der Funktionen $f_1, f_2 : [-\pi,\pi) \to \mathbb{C}$ mit

(i) $f_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{für } |t| < a, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ für ein festes $0 < a < \pi$,

(ii) $f_2(t) = |\sin(t)|$,

für jedes $t \in [-\pi,\pi)$. Für welche $t \in [-\pi,\pi)$ konvergiert die jeweilige Fourier-Reihe? In welchen $t \in [-\pi,\pi)$ stellt sie die jeweilige Funktion dar? Ist die Konvergenz gleichmäßig?

b) Berechnen Sie die folgenden Reihenwerte:

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(ak)}{k}$ für ein festes $0 < a < \pi$,

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$,

(iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$.

Aufgabe 8 (Tutorium)

Berechnen Sie die reellen Fourier-Koeffizienten der Funktionen $f_1, f_2, f_3 : [-\pi,\pi) \to \mathbb{C}$ mit

a) $f_1(t) = |t|$,

b) $f_2(t) = \cosh(t)$,

c) $f_3(t) = \mathrm{e}^{bt}$ für ein festes $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

für jedes $t \in [-\pi,\pi)$. Für welche $t \in [-\pi,\pi)$ konvergiert die jeweilige Fourier-Reihe? In welchen $t \in [-\pi,\pi)$ stellt sie die jeweilige Funktion dar? Ist die Konvergenz gleichmäßig?

Aufgabe 9 (Übung)

a) Sei $f \in C_{\text{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ differenzierbar mit $f' \in C_{\text{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass

$$\widehat{f'}(k) = \mathrm{i}k\hat{f}(k) \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

b) Sei $f \in C_{\text{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ unendlich oft differenzierbar mit $f^{(n)} \in C_{\text{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} |k^N \hat{f}(k)| < \infty \qquad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 10 (Tutorium)

Berechnen Sie die folgenden Reihenwerte:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$,

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+a}$ für ein festes $a > 0$.

Aufgabe 11 (Übung)

Zeigen Sie, dass der normierte Raum $(C[-1,1], \|\cdot\|_2)$ mit

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall f \in C[-1,1]$$

kein Banachraum ist.

Aufgabe 12 (Tutorium)

Ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{\sqrt{k}}$$

die Fourierreihe einer Funktion $f \in C_{\text{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$?
Hinweis: Benutzen Sie die Besselsche Ungleichung.