Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

SS 2015
20.04.2015

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 7 (Übung)

a) Berechnen Sie die reellen Fourier-Koeffizienten der Funktionen $f_1, f_2 : [-\pi, \pi) \to \mathbb{C}$ mit

(i) $f_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{für } |t| < a, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ für ein festes $0 < a < \pi$,

(ii) $f_2(t) = |\sin(t)|$,

für jedes $t \in [-\pi, \pi)$. Für welche $t \in [-\pi, \pi)$ konvergiert die jeweilige Fourier-Reihe? In welchen $t \in [-\pi, \pi)$ stellt sie die jeweilige Funktion dar? Ist die Konvergenz gleichmäßig?

b) Berechnen Sie die folgenden Reihenwerte:

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(ak)}{k}$ für ein festes $0 < a < \pi$,

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}$,

(iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$.

Lösungsvorschlag

a) (i) Da f_1 eine gerade Funktion ist, ist $b_k(f_1) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Für $k = 0$ ist

$$a_0(f_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(0 \cdot t) f_1(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2a\pi} \int_{-a}^{a} 1\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi},$$

während für $k \in \mathbb{N}$

$$a_k(f_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k \cdot t) f_1(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2a\pi} \int_{-a}^{a} \cos(kt)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2ak\pi} \left[\sin(kt)\right]_{t=-a}^{a} = \frac{\sin(ak)}{ak\pi}$$

gilt.

Mit der Zerlegung $\{-\pi, -a, a, \pi\}$ ist f_1 stückweise glatt, also stetig differenzierbar auf den offenen Intervall und die einseitigen Grenzwerte der Funktion und ihrer Ableitung an den Intervallgrenzen existieren. Deshalb konvergiert die Fourier-Reihe für jedes $t \in [-\pi, \pi)$ gegen $\frac{f_1(t+)+f_1(t-)}{2}$. Insbesondere stellt die Fourier-Reihe für jedes $t \in [-\pi, \pi) \setminus \{-a, a\}$ die Funktion f_1 dar, da f_1 dort stetig ist. Für $t_0 \in \{-a, a\}$ gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_1(k) = \frac{(f_1(t_0)+) + (f_1(t_0)-)}{2} = \frac{1}{4a}.$$

Folglich kann die Konvergenz auch nicht gleichmäßig sein, da die Grenzfunktion unstetig bei $-a$ und a ist.

(ii) Da f_2 eine gerade Funktion ist, ist $b_k(f_2) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Für $k = 0$ ist

$$a_0(f_2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(0 \cdot t)|\sin(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\left[-\cos(t)\right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{4}{\pi}.$$

Für $a_k(f_2)$ mit $k \in \mathbb{N}$ berechnen wir vorbereitend

$$\int \underbrace{\sin(t)}_{u'}\underbrace{\cos(kt)}_{v}\,\mathrm{d}t \quad = \quad -\cos(t)\cos(kt) - k\int \cos(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t.$$

Für $k = 1$ ist also

$$\int \sin(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\cos^2(t),$$

für $k > 1$ führt eine weitere partielle Integration auf

$$-\cos(t)\cos(kt) - k\int \underbrace{\cos(t)}_{u'}\underbrace{\sin(kt)}_{v}\,\mathrm{d}t \quad = \quad -\cos(t)\cos(kt) - k\left(\sin(t)\sin(kt) - k\int \sin(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t\right)$$

$$\Rightarrow \int \sin(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t \quad = \quad \frac{1}{k^2-1}\left(\cos(t)\cos(kt) + k\sin(t)\sin(kt)\right).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} a_k(f_2) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)f_2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(kt)\sin(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{\pi}\left[\cos^2(t)\right]_{t=0}^{\pi} = 0 & \text{für } k = 1, \\ \frac{2}{\pi(k^2-1)}\left[\cos(t)\cos(kt) + k\sin(t)\sin(kt)\right]_{t=0}^{\pi} = -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1+(-1)^k}{k^2-1} & \text{für } k > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Mit der Zerlegung $\{-\pi, \pi\}$ ist f_2 stückweise glatt, also stetig differenzierbar auf den offenen Intervall und die einseitigen Grenzwerte der Funktion und ihrer Ableitung an den Intervallgrenzen existieren. Deshalb konvergiert die Fourier-Reihe für jedes $t \in [-\pi, \pi)$ gegen $\frac{f_2(t+)+f_2(t-)}{2}$. Da die periodische Fortsetzung von f_2, wegen $f_2(-\pi) = \lim_{t\to\pi-} f_2(t) = 0$, stetig ist, stellt die Fourier-reihe für jedes $t \in [-\pi, \pi)$ die Funktion f_2 dar. Wegen

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f_2)\cos(kt)| \leq \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < \infty,$$

ist die Fourierreihe nach Satz 7.18 (2) aus HM 1 gleichmäßig konvergent, da wir die Summanden gliedweise und unabhängig von t nach oben durch eine konvergente Reihe abgeschätzt haben.

b) (i) Nach a) (i) gilt, dass die Funktion f_1 außerhalb von $\pm a$ mit ihrer Fourierreihe übereinstimmt. Für $t = 0$ ergibt sich also

$$\frac{1}{2a} = f_1(0) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(ak)}{ak\pi},$$

also

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(ak)}{k} = \frac{\pi - a}{2}$$

(ii) Gleich wie in (i) folgt, dass

$$0 = f_2(0) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2 - 1}$$

und somit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2}$$

(iii) Laut Vorlesung lauten die Fourier-Koeffizienten der Funktion $f : [-\pi, \pi) \to \mathbb{C}$, definiert durch $f(t) = t^2$, gerade

$$\hat{f}(0) = \frac{\pi^2}{3}, \qquad \hat{f}(k) = \frac{2(-1)^k}{k^2}$$

für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Nach Satz 16.4 (1) gilt

$$\|f\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 = \frac{\pi^4}{9} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^4}$$

Einsetzen von $\|f\|_2^2 = \frac{2\pi^5}{5}$ liefert

$$\frac{\pi^4}{5} = \frac{\pi^4}{9} + 8 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4},$$

wodurch sich durch Auflösen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

ergibt.

Aufgabe 8 (Tutorium)

Berechnen Sie die reellen Fourier-Koeffizienten der Funktionen $f_1, f_2, f_3 : [-\pi, \pi) \to \mathbb{C}$ mit

a) $f_1(t) = |t|$,

b) $f_2(t) = \cosh(t)$,

c) $f_3(t) = e^{bt}$ für ein festes $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

für jedes $t \in [-\pi, \pi)$. Für welche $t \in [-\pi, \pi)$ konvergiert die jeweilige Fourier-Reihe? In welchen $t \in [-\pi, \pi)$ stellt sie die jeweilige Funktion dar? Ist die Konvergenz gleichmäßig?

Lösungsvorschlag

a) Da f_1 eine gerade Funktion ist, folgt $b_k(f_1) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$a_0(f_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \, dt = \pi$$

sowie

$$
\begin{aligned}
a_k(f_1) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t|\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(kt)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\Bigg(\underbrace{[\frac{1}{k}t\sin(kt)]_{t=0}^{\pi}}_{=0} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin(kt)\,\mathrm{d}t\Bigg) = \frac{2}{\pi k^2}[\cos(kt)]_{t=0}^{\pi} = 2\frac{(-1)^k-1}{\pi k^2}
\end{aligned}
$$

für $k \in \mathbb{N}$. Mit der Zerlegung $\{-\pi, \pi\}$ ist f_1 stückweise glatt, also stetig differenzierbar auf den offenen Intervall und die einseitigen Grenzwerte der Funktion und ihrer Ableitung an den Intervallgrenzen existieren. Deshalb konvergiert die Fourier-Reihe für jedes $t \in [-\pi, \pi)$ gegen $\frac{f_1(t+)+f_1(t-)}{2}$. Da die periodische Fortsetzung von f_1, wegen $f_1(-\pi) = \lim_{t\to\pi-} f_1(t) = \pi$, stetig ist, stellt die Fourier-reihe für jedes $t \in [-\pi, \pi)$ die Funktion f_1 dar. Wegen

$$
\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f_1)\cos(kt)| \leqslant 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}
$$

und der Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$ (Teil der konvergenten, positiven Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$) ist die Fourierreihe nach Satz 7.18 (2) aus HM 1 gleichmäßig konvergent, da wir die Summanden gliedweise und unabhängig von t nach oben durch eine konvergente Reihe abgeschätzt haben.

b) Da f_2 eine gerade Funktion ist, ist $b_k(f_2) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Für $k = 0$ ist

$$
a_0(f_2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(0\cdot t)f_2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cosh(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}[\sinh(t)]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{2\sinh(\pi)}{\pi}.
$$

Für $a_k(f_2)$ mit $k \in \mathbb{N}$ berechnen wir vorbereitend

$$
\begin{aligned}
\int \underbrace{\cosh(t)}_{u'}\underbrace{\cos(kt)}_{v}\,\mathrm{d}t &= \sinh(t)\cos(kt) + k\int \underbrace{\sinh(t)}_{u'}\underbrace{\sin(kt)}_{v}\,\mathrm{d}t \\
&= \sinh(t)\cos(kt) + k\cosh(t)\sin(kt) - k^2\int \cosh(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t \\
\Rightarrow \int \cosh(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{k^2+1}(\sinh(t)\cos(kt) + k\cosh(t)\sin(kt)).
\end{aligned}
$$

Damit folgt

$$
\begin{aligned}
a_k(f_2) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kt)f_2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(kt)\cosh(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi(k^2+1)}[\sinh(t)\cos(kt) + k\cosh(t)\sin(kt)]_{t=0}^{\pi} = \frac{2\sinh(\pi)}{\pi}\cdot\frac{(-1)^k}{k^2+1}.
\end{aligned}
$$

Mit der Zerlegung $\{-\pi, \pi\}$ ist f_2 stückweise glatt, also stetig differenzierbar auf den offenen Intervall und die einseitigen Grenzwerte der Funktion und ihrer Ableitung an den Intervallgrenzen existieren. Deshalb konvergiert die Fourier-Reihe für jedes $t \in [-\pi, \pi)$ gegen $\frac{f_2(t+)+f_2(t-)}{2}$. Da die periodische Fortsetzung von f_2, wegen $f_2(-\pi) = \lim_{t\to\pi-} f_2(t) = \cosh(\pi)$, stetig ist, stellt die Fourier-reihe für jedes $t \in [-\pi, \pi)$ die Funktion f_2 dar. Wegen

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f_2)\cos(kt)| \leq \frac{2\sinh(\pi)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty,$$

ist die Fourierreihe nach Satz 7.18 (2) aus HM 1 gleichmäßig konvergent, da wir die Summanden gliedweise und unabhängig von t nach oben durch eine konvergente Reihe abgeschätzt haben.

c) Berechne zunächst die komplexen Fourier-Koeffizienten von f_3. Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist

$$\begin{aligned} \hat{f}_3(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{bt}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{b-\mathrm{i}k}\left[\mathrm{e}^{(b-\mathrm{i}k)t}\right]_{t=-\pi}^{t=\pi} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{b-\mathrm{i}k}\frac{\mathrm{e}^{(b-\mathrm{i}k)\pi} - \mathrm{e}^{-(b-\mathrm{i}k)\pi}}{2} \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{b-\mathrm{i}k}\frac{\mathrm{e}^{b\pi}\overbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi}}^{=(-1)^k} - \mathrm{e}^{-b\pi}\overbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi}}^{=(-1)^k}}{2} = \frac{1}{\pi}\sinh(b\pi)\frac{(-1)^k}{b-\mathrm{i}k} = \sinh(b\pi)\frac{1}{\pi}(-1)^k\frac{b+\mathrm{i}k}{b^2+k^2}. \end{aligned}$$

Für die reellen Fourier-Koeffizienten gilt nach Vorlesung

$$a_k(f_3) = \hat{f}_3(k) + \hat{f}_3(-k), \qquad b_k(f_3) = \mathrm{i}(\hat{f}_3(k) - \hat{f}_3(-k))$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und alle $j \in \mathbb{N}$. Folglich ist

$$a_0(f_3) = \frac{2\sinh(b\pi)}{\pi b}, \quad a_k(f_3) = \frac{2\sinh(b\pi)}{\pi}\frac{(-1)^k b}{b^2+k^2}, \text{ sowie } \quad b_k(f_3) = \frac{2\sinh(b\pi)}{\pi}\frac{(-1)^{k+1}k}{b^2+k^2}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

Mit der Zerlegung $\{-\pi, \pi\}$ ist f_3 stückweise glatt, also stetig differenzierbar auf den offenen Intervall und die einseitigen Grenzwerte der Funktion und ihrer Ableitung an den Intervallgrenzen existieren. Deshalb konvergiert die Fourier-Reihe für jedes $t \in [-\pi, \pi)$ gegen $\frac{f_3(t+)+f_3(t-)}{2}$. Die peridische Fortsetzung von f_3 ist wegen $f(-\pi) = \mathrm{e}^{-b\pi} \neq \mathrm{e}^{b\pi} = \lim_{t\to\pi-} f_3(t)$ in $-\pi$ unstetig, weshalb die Fourierreihe dort nicht gegen f_3 konvergiert (sondern gegen $\frac{\mathrm{e}^{b\pi}+\mathrm{e}^{-b\pi}}{2}$) und die Konvergenz wegen der Unstetigkeit auch nicht gleichmäßig sein kann.

Aufgabe 9 (Übung)

a) Sei $f \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ differenzierbar mit $f' \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass

$$\widehat{f'}(k) = \mathrm{i}k\hat{f}(k) \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

b) Sei $f \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ unendlich oft differenzierbar mit $f^{(n)} \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} |k^N \hat{f}(k)| < \infty \qquad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Lösungsvorschlag

a) Für $k = 0$ gilt wegen der Periodizität von f

$$\widehat{f'}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{f(\pi) - f(-\pi)}{2\pi} = 0 = \mathrm{i}\cdot 0 \cdot \hat{f}(0).$$

Für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ erhalten wir mit Hilfe von partieller Integration

$$\widehat{f'}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} \, \mathrm{d}t = \underbrace{\frac{1}{2\pi} [f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}]_{t=-\pi}^{\pi}}_{=0, \text{ da } 2\pi\text{-per.}} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \mathrm{i}k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} \, \mathrm{d}t = \mathrm{i}k \hat{f}(k).$$

b) Sei $N \in \mathbb{N}$. Wenden wir die Formel aus **a)** für die Fourierkoeffizienten von $f^{(N)}$ N Mal an, so erhalten wir

$$\widehat{f^{(N)}}(k) = \mathrm{i}k \widehat{f^{(N-1)}}(k) = \ldots = (\mathrm{i}k)^N \hat{f}(k) \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Wegen $f^{(N)} \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ gilt $\sup_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f^{(N)}}(k)| < \infty$, denn: Aus Satz 16.4 (bzw. auch 15.9) folgt die Konvergenz von $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f^{(N)}}(k)|^2$, also die Beschränktheit von der Folge $(|\widehat{f^{(N)}}(k)|^2)_{k \in \mathbb{Z}}$ und somit auch von $(|\widehat{f^{(N)}}(k)|)_{k \in \mathbb{Z}}$. Somit gilt

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} |k^N \hat{f}(k)| = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f^{(N)}}(k)| < \infty.$$

Dies bedeutet, dass die Fourierkoeffizienten schneller abfallen als jede Potenz von $\frac{1}{|k|}$.

Aufgabe 10 (Tutorium)

Berechnen Sie die folgenden Reihenwerte:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$,

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + a}$ für ein festes $a > 0$.

Lösungsvorschlag

a) Nach **Aufgabe 8 a)** lauten die Fourier-Koeffizienten der Funktion $f_1 : (-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, definiert durch $f_1(t) = |t|$ gerade

$$a_0(f_1) = \pi, \qquad a_k(f_1) = \begin{cases} 0 & \text{für } k = 2m, \\ -\frac{4}{\pi k^2} & \text{für } k = 2m-1 \end{cases}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Da f_1 in allen Punkten durch ihre Fourierreihe dargestellt wird, gilt

$$0 = f_1(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2}.$$

Folglich ist

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

b) Nach **Aufgabe 8 b)** lauten die reellen Fourier-Koeffizienten der Funktion $f_3 : (-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, definiert durch $f_3(t) = \mathrm{e}^{bt}$ für ein $b \neq 0$, gerade

$$a_0(f_3) = \frac{2\sinh(b\pi)}{\pi b}, \quad a_k(f_3) = \frac{2\sinh(b\pi)}{\pi} \frac{(-1)^k b}{b^2 + k^2}, \quad b_k(f_3) = \frac{2\sinh(b\pi)}{\pi} \frac{(-1)^{k+1} k}{b^2 + k^2}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$1 = f_3(0) = \frac{\sinh(b\pi)}{\pi b} + \frac{2b\sinh(b\pi)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{b^2+k^2}$$

und somit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{b^2+k^2} = \frac{\pi}{2b\sinh(b\pi)} - \frac{1}{2b^2}$$

Mit $b = \sqrt{a}$ folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}\sinh(\sqrt{a}\pi)} - \frac{1}{2a}$$

Aufgabe 11 (Übung)

Zeigen Sie, dass der normierte Raum $(C[-1,1], \|\cdot\|_2)$ mit

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall f \in C[-1,1]$$

kein Banachraum ist.

Lösungsvorschlag

Wir definieren die Funktionenfolge

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & , -1 \leqslant x \leqslant -\frac{1}{n}, \\ nx & , -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}, \\ 1 & , \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Jede dieser Funktionen liegt offensichtlich in $C[-1,1]$. Wir zeigen, dass die Folge eine Cauchyfolge in $(C[-1,1], \|\cdot\|_2)$ ist. Für $m \geqslant n$ gilt

$$f_m(x) - f_n(x) = \begin{cases} -1 - nx & , -\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant -\frac{1}{m}, \\ (m-n)x & , -\frac{1}{m} < x < \frac{1}{m}, \\ 1 - nx & , \frac{1}{m} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}, \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

Die Funktionen unterscheiden sich demnach nur auf $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ und dort um maximal 1 Deshalb gilt

$$\|f_m - f_n\|_2^2 \leqslant \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} 1^2 \,\mathrm{d}x = \frac{2}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Wäre $(C[-1,1], \|\cdot\|_2)$ ein Banachraum, so müsste nun die eine stetige Grenzfunktion existieren, gegen die (f_n) in der $\|\cdot\|$-Norm konvergiert. Eine Funktion, gegen die (f_n) konvergiert, ist durch die unstetige Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , -1 \leqslant x < 0, \\ 0 & x = 0, \\ 1 & , 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

gegeben. Dies liegt an

$$\|f_n - f\|_2^2 = 2\int_0^{\frac{1}{n}} (1-nx)^2 \, \mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^{\frac{1}{n}} 1 \, \mathrm{d}x = \frac{2}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Gäbe es eine weitere Funktion g, die dies erfüllt, so wäre

$$\|f-g\|_2 \leqslant \|f-f_n\|_2 + \|f_n - g\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

also $\|f-g\|_2 = 0$ und somit auch

$$\|f-g\|_2^2 = \int_{-1}^{1} |f(x)-g(x)|^2 = 0.$$

Somit ist auch jeder Teil dieses Integrals 0, da der Integrand nicht-negativ ist. Wäre $g(x_0) \neq 1$ für ein $x_0 > 0$, so wäre $|f(x)-g(x)|^2$ in einer Umgebung von x_0 positiv und das Integral somit ebenfalls (da g stetig, vgl. Auf. 59 b) aus HM 1), gleiches gilt für $g(x_0) \neq -1$ für ein $x_0 < 0$. Also gilt $g(x) = -1$ für $x < 0$ und $g(x) = 1$ für $x > 0$, womit g nicht stetig in 0 sein kann.

Aufgabe 12 (Tutorium)

Ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{\sqrt{k}}$$

die Fourierreihe einer Funktion $f \in C_{\text{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$?
Hinweis: Benutzen Sie die Besselsche Ungleichung.

Lösungsvorschlag

Angenommen, es existiert eine Funktion $f \in C_{\text{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$, deren reelle Fourierkoeffizienten gegen sind durch $a_k = 0$ ($k \in \mathbb{N}_0$) und $b_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$ ($k \in \mathbb{N}$). Da die Funktionen $e_k = \mathrm{e}^{ik\cdot}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von $C_{\text{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ sind, folgt nach der Besselschen Ungleichung

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 \leqslant \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \infty,$$

Da stetige Funktionen (wie $x \mapsto |f(x)|^2$) Riemann-integrierbar auf kompakten Intervallen sind. Für die Fourierkoeffizienten gilt

$$\hat{f}(0) = 0, \quad \hat{f}(k) = \frac{1}{2}(a_k - \mathrm{i}b_k) = -\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{k}}, \quad \hat{f}(-k) = \frac{1}{2}(a_k + \mathrm{i}b_k) = \frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{k}}$$

für $k \in \mathbb{N}$. Wir erhalten

$$\infty > \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=-K}^{K} |\hat{f}(k)|^2 = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K} \left(|\hat{f}(k)|^2 + |\hat{f}(-k)|^2\right) = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2k}.$$

Somit würde die harmonische Reihe konvergieren, ein Widerspruch. Also existiert keine solche Funktion.