Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

SS 2015
27.04.2015

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 13 (Tutorium)

a) Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Determinante von A, indem Sie

(i) die Regel von Sarrus verwenden.

(ii) nach der ersten Zeile entwickeln.

(iii) durch Spaltenumformungen einen Einheitsvektor erzeugen und nach diesem entwickeln.

b) Berechnen Sie die Determinanten der folgenden reellen Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C_\alpha = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & \alpha+1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist C_α regulär?

Lösungsvorschlag

a) (i) Die Regel von Sarrus liefert

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2 \cdot 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) \cdot (-1) - 4 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot (-2) - 2 \cdot 1 \cdot (-1) \\ &= -4 + 2 + 4 - 4 - 4 + 2 = -4. \end{aligned}$$

(ii) Entwickeln nach der ersten Zeile liefert

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot ((-2) - (-1)) - 2 \cdot (2-1) + 4 \cdot (1-1) = -2 - 2 = -4. \end{aligned}$$

(iii) Es gilt

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{Entw. 3. Z.}}{=} (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

b) Mit den Rechenregeln für Determinanten folgt:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Laut Vorlesung ist die Determinante einer oberen rechten Dreiecksmatrix gleich dem Produkt der Diagonalelemente. Also ist $\det(A) = -6$. Weiter gilt

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 6 & 5 \end{vmatrix} \overset{\text{Entw. 2. Z.}}{=} (-1)^{1+2} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & 7 & 3 \\ 3 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 18 & 11 \\ -1 & 7 & 3 \\ 0 & 27 & 14 \end{vmatrix} \overset{\text{Entw. 1. S.}}{=} (-1)^{1+2} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 18 & 11 \\ 27 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18 & 11 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 54 - 99 = -45.$$

Zuletzt gilt

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & \alpha+1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & \alpha-2 \end{vmatrix} \overset{\text{Entw. 2. S.}}{=} (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & \alpha-2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \alpha-4 \end{vmatrix} \overset{\text{Entw. 1. Z.}}{=} (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha-4 \end{vmatrix} = (\alpha-4) - 1 = \alpha - 5,$$

womit C genau dann regulär ist, wenn $\alpha \neq 5$ gilt.

Aufgabe 14 (Tutorium)

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei das reelle lineare Gleichungssystem $A_\alpha x = b_\alpha$ gegeben durch:

$$\begin{cases} (\alpha-2)\cdot x + (\alpha-1)\cdot y - (\alpha-1)\cdot z = 0 \\ (6-3\alpha)\cdot x + (\alpha^2-1)\cdot y + (\alpha-1)\cdot z = 0 \\ (\alpha^2-\alpha-2)\cdot x + \alpha(\alpha-1)\cdot y - \alpha(\alpha-1)\cdot z = \alpha-1. \end{cases}$$

a) Berechnen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix A_α.

b) Finden Sie für diejenigen α, für welche obiges Gleichungssystem eindeutig lösbar ist, die Lösung mittels der Cramerschen Regel.

Lösungsvorschlag

a) Es gilt

$$\det(A_\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha-2 & \alpha-1 & -(\alpha-1) \\ 3(2-\alpha) & (\alpha+1)(\alpha-1) & (\alpha-1) \\ (\alpha-2)(\alpha+1) & \alpha(\alpha-1) & -\alpha(\alpha-1) \end{vmatrix} = (\alpha-2)(\alpha-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & \alpha+1 & 1 \\ \alpha+1 & \alpha & -\alpha \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha-2)(\alpha-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & \alpha+2 & 1 \\ 1 & 0 & -\alpha \end{vmatrix} \overset{\text{Entw. 3. S.}}{=} (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot (\alpha-2)(\alpha-1)^2 \begin{vmatrix} -2 & \alpha+2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha-2)(\alpha-1)^2(\alpha+2).$$

Die Matrix A_α ist also invertierbar für alle $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 2\}$.

b) Cramersche Regel: Ist $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ invertierbar, $A = (a_1, \ldots, a_n)$, so sind die Komponenten der Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ (mit $b \in \mathbb{K}^n$) gegeben durch

$$x_j = \frac{\det(a_1, \ldots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \ldots, a_n)}{\det(A)} \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Um die Lösung des gegebenen linearen Gleichungssystems zu berechnen, benötigen wir also die folgenden Determinanten:

$$D_1 := \begin{vmatrix} 0 & \alpha-1 & -(\alpha-1) \\ 0 & (\alpha+1)(\alpha-1) & \alpha-1 \\ \alpha-1 & \alpha(\alpha-1) & -\alpha(\alpha-1) \end{vmatrix} = (\alpha-1) \begin{vmatrix} \alpha-1 & -(\alpha-1) \\ (\alpha+1)(\alpha-1) & \alpha-1 \end{vmatrix} = (\alpha-1)^3(\alpha+2).$$

$$D_2 := \begin{vmatrix} \alpha-2 & 0 & -(\alpha-1) \\ 3(2-\alpha) & 0 & \alpha-1 \\ (\alpha-2)(\alpha+1) & \alpha-1 & -\alpha(\alpha-1) \end{vmatrix} = -(\alpha-1) \begin{vmatrix} \alpha-2 & -(\alpha-1) \\ -3(\alpha-2) & \alpha-1 \end{vmatrix} = 2(\alpha-1)^2(\alpha-2).$$

$$D_3 := \begin{vmatrix} \alpha-2 & \alpha-1 & 0 \\ -3(\alpha-2) & (\alpha+1)(\alpha-1) & 0 \\ (\alpha-2)(\alpha+1) & \alpha(\alpha-1) & \alpha-1 \end{vmatrix} = (\alpha-1) \begin{vmatrix} \alpha-2 & \alpha-1 \\ -3(\alpha-2) & (\alpha+1)(\alpha-1) \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha-1)^2(\alpha-2)(\alpha+4).$$

Für die Komponenten des Lösungsvektors folgt also

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{D_1}{\det(A_\alpha)} = \frac{(\alpha-1)^3(\alpha+2)}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2(\alpha+2)} = \frac{\alpha-1}{\alpha-2}\\
x_2 &= \frac{D_2}{\det(A_\alpha)} = \frac{2(\alpha-1)^2(\alpha+2)}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2(\alpha+2)} = \frac{2}{\alpha+2}\\
x_3 &= \frac{D_3}{\det(A_\alpha)} = \frac{(\alpha-1)^2(\alpha-2)(\alpha+4)}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2(\alpha+2)} = \frac{\alpha+4}{\alpha+2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 15 (Tutorium)

a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$B_n(z) = \begin{pmatrix}
1+z^2 & z & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\
z & 1+z^2 & z & 0 & & & \vdots\\
0 & z & 1+z^2 & z & 0 & & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
\vdots & & 0 & z & 1+z^2 & z & 0\\
\vdots & & & 0 & z & 1+z^2 & z\\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & z & 1+z^2
\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

b) Sei $b \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ fest. Berechnen Sie für die lineare Abbildung

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad Ta = a \times b,$$

(i) die Adjungierte T^*,

(ii) $\operatorname{Kern}(T)$,

(iii) $\operatorname{Bild}(T)$.

Hinweis: Verwenden Sie **Aufgabe 1 a)**.

Lösungsvorschlag

a) Sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig. Für $n = 1$ gilt:

$$\det(B_1(z)) = \begin{vmatrix} 1+z^2 \end{vmatrix} = 1+z^2$$

Für $n = 2$ gilt

$$\det(B_2(z)) = \begin{vmatrix} 1+z^2 & z\\ z & 1+z^2 \end{vmatrix} = (1+z^2)^2 - z^2 = 1 + 2z^2 + z^4 - z^2 = 1 + z^2 + z^4$$

Für alle $n > 2$ gilt nach dem Determinantenentwicklungssatz

$$
\begin{aligned}
\det(B_n(z)) &= \begin{vmatrix}
1+z^2 & z & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
z & 1+z^2 & z & 0 & & & \vdots \\
0 & z & 1+z^2 & z & 0 & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & 0 & z & 1+z^2 & z & 0 \\
\vdots & & & 0 & z & 1+z^2 & z \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & z & 1+z^2
\end{vmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n} \\
&= (1+z^2) \begin{vmatrix}
1+z^2 & z & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
z & 1+z^2 & z & 0 & & & \vdots \\
0 & z & 1+z^2 & z & 0 & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & 0 & z & 1+z^2 & z & 0 \\
\vdots & & & 0 & z & 1+z^2 & z \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & z & 1+z^2
\end{vmatrix} \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)} \\
&\quad -z \begin{vmatrix}
z & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
z & 1+z^2 & z & 0 & & & \vdots \\
0 & z & 1+z^2 & z & 0 & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & 0 & z & 1+z^2 & z & 0 \\
\vdots & & & 0 & z & 1+z^2 & z \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & z & 1+z^2
\end{vmatrix} \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)} \\
&= (1+z^2)\det(B_{n-1}(z)) \\
&\quad -z^2 \begin{vmatrix}
1+z^2 & z & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
z & 1+z^2 & z & 0 & & & \vdots \\
0 & z & 1+z^2 & z & 0 & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & 0 & z & 1+z^2 & z & 0 \\
\vdots & & & 0 & z & 1+z^2 & z \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & z & 1+z^2
\end{vmatrix} \in \mathbb{C}^{(n-2)\times(n-2)} \\
&= (1+z^2)\det(B_{n-1}(z)) - z^2\det(B_{n-2}(z))
\end{aligned}
$$

Es ist etwa:

$$
\begin{aligned}
\det(B_3(z)) &= (1+z^2)\det(B_2(z)) - z^2\det(B_1(z)) \\
&= (1+z^2)(1+z^2+z^4) - z^2(1+z^2) = (1+z^2)(1+z^4) \\
&= 1+z^2+z^4+z^6
\end{aligned}
$$

Dies legt die Vermutung

$$\det(B_n(z)) = \sum_{m=0}^{n} z^{2m}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ nahe. Diese beweisen wir per Induktion:

IA ($n = 1$, $n = 2$): siehe oben.

IS: Es sei $n \in \mathbb{N}$. Für alle $k \leq n$ gelte die Behauptung (IV)

$$\det(B_k(z)) = \sum_{m=0}^{k} z^{2m}.$$

O.B.d.A. ist $n \geq 2$ (ansonsten benutze (IA)). Dann gilt für $n+1$:

$$\begin{aligned}
\det(B_{n+1}(z)) &\overset{\text{s.o.}}{=} (1+z^2)\det(B_n(z)) - z^2\det(B_{n-1}(z)) \\
&\overset{\text{(IV)}}{=} (1+z^2)\sum_{m=0}^{n} z^{2m} - z^2\sum_{m=0}^{n-1} z^{2m} \\
&= \sum_{m=0}^{n} z^{2m} + z^2 z^{2n} + z^2\sum_{m=0}^{n-1} z^{2m} - z^2\sum_{m=0}^{n-1} z^{2m} \\
&= \sum_{m=0}^{n} z^{2m} + z^{2(n+1)} = \sum_{m=0}^{n+1} z^{2m}
\end{aligned}$$

b) (i) Seien $a, c \in \mathbb{R}^3$. Es gilt:

$$(Ta|c) = (a \times b|c) \overset{17.10}{=} \det(a,b,c) \overset{17.2}{=} -\det(c,b,a) \overset{17.10}{=} -(c \times b|a) \overset{\text{(S1)}}{=} (a|-Tc) = (a|T^*c)$$

Also ist $T^* = -T$.

(ii) Nach 17.11 (5) für alle $a \in \mathbb{R}^3$

$$0 = Ta = a \times b \Leftrightarrow a, b \text{ linear abhängig},$$

also ist $\text{Kern}(T) = \text{lin}(\{b\})$.

(iii) Nach Aufgabe 1 (a) gilt $\text{Bild}(T) = \text{Kern}(T^*)^\perp$. Mit (i) und (ii) folgt

$$\text{Bild}(T) = \text{Kern}(T)^\perp = \text{lin}(\{b\})^\perp = \left\{a \in \mathbb{R}^3 : (a|b) = 0\right\}.$$