Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

SS 2015
04.05.2015

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

4. Übungsblatt

Aufgabe 16 (Übung)

Betrachten Sie

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 2 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \end{pmatrix} .$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A und geben Sie eine orthogonale Matrix S an, so dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

b) Bestimmen Sie eine Matrix $W \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ derart, dass $W^2 = A$ gilt.

Aufgabe 17 (Tutorium)

Betrachten Sie

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} .$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B und geben Sie eine orthogonale Matrix T an, so dass $T^{-1}BT$ Diagonalgestalt hat.

b) Berechnen Sie B^k für alle $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 18 (Übung)

a) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie die Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

auf Definitheit.

b) Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 17 & 16 & 15 \\ 9 & 8 & 7 \\ \beta & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

ähnliche Matrizen. Finden Sie die möglichen Werte von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 19 (Tutorium)

Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume von

$$A = \begin{pmatrix} 22 & -2 & -4 \\ 4 & 16 & -4 \\ 2 & -1 & 16 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche algebraischen und geometrischen Vielfachheiten haben die Eigenwerte? Welche Matrix ist diagonalisierbar? Ermitteln Sie, falls möglich, reguläre Matrizem S_A bzw. S_B so, sodass $S_A^{-1}AS_A$ bzw. $S_B^{-1}BS_B$ Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 20 (Übung)

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Man nennt A und B *simultan diagonalisierbar*, falls es eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gibt, so dass sowohl $S^{-1}AS$, als auch $S^{-1}BS$ Diagonalgestalt haben. Zeigen Sie:

a) Sind A und B simultan diagonalisierbar, so gilt $AB = BA$.

b) Gilt $AB = BA$ und haben überdies alle Eigenwerte von A die algebraische Vielfachheit eins, so sind A und B simultan diagonalisierbar.

Hinweis: Man kann ebenfalls zeigen, dass A und B simultan diagonalisierbar sind, falls $AB = BA$ gilt sowie A und B diagonalisierbar sind.

Aufgabe 21 (Tutorium)

a) Seien $\beta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie die Matrix

$$B_\beta = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} + \frac{\beta}{2} & \frac{4}{3} - \frac{\beta}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} - \frac{\beta}{2} & \frac{4}{3} + \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

auf Definitheit.

b) Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie ihre Antwort.

(i) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A, so ist auch $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert von A.

(ii) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A, so existiert ein reeller Eigenvektor $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ von A zum Eigenwert λ.

(iii) Sind $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A sowie $\mu \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von B, so ist $\lambda\mu$ ein Eigenwert von AB.

(iv) Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A, so ist λ^2 ein Eigenwert von A^2.

(v) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und n gerade/ungerade, so besitzt A einen reellen Eigenwert.

(vi) Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitär und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A, so gilt $|\lambda| = 1$.

Hinweis: Ab sofort wird das aktuelle Übungsblatt auch in den Ausgabefächern in Raum 3.066 des Mathematikgebäudes (Geb. 20.30) ausgelegt.