Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

SS 2015
11.05.2015

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

5. Übungsblatt

Aufgabe 22 (Übung)

Seien $A, B, A_j \subseteq \mathbb{R}^n$ für $j \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

a) Sind A und B offen, so auch $A \cup B$ und $A \cap B$. Ist A offen und B abgeschlossen, so ist auch $A \setminus B$ offen.

b) Sind A und B abgeschlossen, so auch $A \cup B$ und $A \cap B$. Ist A abgeschlossen und B offen, so ist auch $A \setminus B$ abgeschlossen.

c) Sind alle A_j offen, so auch $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$. Sind alle A_j abgeschlossen, so auch $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j$.

Aufgabe 23 (Tutorium)

a) Überprüfen Sie die folgenden Mengen auf Offenheit und Abgeschlossenheit:

(i) $M_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + 5y^2 < 1\right\}$

(ii) $M_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2 - 2xy \geq 3) \wedge (y \geq x)\right\} \cup \{(0, 0)\}$

b) Geben Sie je ein Beispiel einer stetigen Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an, sodass

(i) Das Bild einer (speziellen) offenen Menge $O \subseteq \mathbb{R}^2$ unter f nicht offen ist.

(ii) Das Bild einer (speziellen) abgeschlossenen Menge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ unter f nicht abgeschlossen ist.

Aufgabe 24 (Übung)

Es sei $m \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie jeweils die angegebene Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$ in $0 \in D$ auf Stetigkeit.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x) := \begin{cases} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right), |x|^{x^2}\right), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ (0, 1), & x = 0. \end{cases}$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = \begin{cases} \frac{4xy}{x^2+y^2} \sin(xy^2 - x^2 y), & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x, y) := \begin{cases} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ (0, 0), & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y, z) := \begin{cases} \frac{(1-\cos(xy))\sin(x+z)}{x^3}, & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } x \neq 0, \\ \frac{z}{2}, & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } x = 0. \end{cases}$

Aufgabe 25 (Tutorium)

Die Funktionen f, g und h seien für $(0,0) \neq (x,y) \in \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x,y) := \frac{xy^2}{x^2+y^2}, \qquad g(x,y) := \frac{xy^2}{x^2+y^4}, \qquad h(x,y) := \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

gegeben und $f(0,0) := g(0,0) := h(0,0) := 0$. Zeigen Sie:

a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist stetig.

b) Die Funktion g ist in $(0,0)$ nicht stetig, aber g ist im Nullpunkt *längs jeder Geraden stetig*: Für jedes feste $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt $g(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \to g(0,0)$ für $r \to 0+$.

c) Die Funktion h ist in $(0,0)$ nicht stetig, aber die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} h(x,y) \quad \text{und} \quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} h(x,y)$$

existieren und stimmen mit $h(0,0)$ überein.

Aufgabe 26 (Übung)

Es sei $D := U_1((0,0)) \setminus \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$. Untersuchen Sie jeweils für die angegebene Funktion f ob der Grenzwert $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existiert und bestimmen Sie diesen gegebenenfalls.

a) $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := \frac{\sin(x^3y)}{e^{y^2}\cos(xy)}$,

b) $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := \frac{x^{k-1}y^{k+3}+x^ky^{k+2}}{6x^{2k+2}+4y^{2k+2}}$ für ein $k \in \mathbb{N}$,

c) $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := (1-e|x+y|)^{x/(x^2+y^2)}$.

Aufgabe 27 (Tutorium)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit.

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \begin{cases} \frac{2x^2y^3}{x^8+y^4}, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ 2, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \begin{cases} (1+|xy|)^{\frac{1}{x^2+y^2}}, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ 1, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Informationen zu den Prüfungen

- Die **Übungsklausur** findet am **04.07.2015** von **9 bis 11** Uhr im **Benz-Hörsaal** statt.
- Am **18.09.2015** von **9 bis 11** Uhr findet die **Modulprüfung** statt.
- Als Hilftmittel zugelassen sind drei beidseitig handbeschriebene DIN-A4-Blätter.
- Die Anmeldung ist ab sofort online im QISPOS möglich.
- **Anmeldeschluss** ist der **19.07.2015**.
- Die **Hörsaalverteilung** wird am **21.07.2015** hier und am Brett neben Zimmer 2.027 (Geb. 20.30) bekanntgegeben.