Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

SS 2015
18.05.2015

# Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

## 6. Übungsblatt

### Aufgabe 28 (Übung)

**a)** Die Kurve $\gamma : (-1,1) \to \mathbb{R}^3$ sei durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \arcsin(t) \\ t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix} \qquad \forall t \in (-1,1)$$

gegeben. Ist $\gamma$ eine reguläre Kurve? Bestimmen Sie ihre Länge $L(\gamma)$ und natürliche Parameterisierung.

**b)** Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y,z) := \begin{cases} \frac{x^2y^2z}{x^4+y^4+z^4}, & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}, \\ 0, & (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ in denen $f$ (partiell) differenzierbar ist.

### Aufgabe 29 (Tutorium)

**a)** Die Kurve $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ sei durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \frac{2t}{\pi} \end{pmatrix} \qquad \forall t \in [0,2\pi]$$

gegeben. Ist $\gamma$ eine reguläre Kurve? Bestimmen Sie ihre Länge $L(\gamma)$ und natürliche Parametrisierung.

**b)** Seien $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \|x\|^k & , x \neq 0, \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}^n$ in denen $f$ (partiell) differenzierbar ist und geben Sie, wenn möglich, $\nabla f$ an.

### Aufgabe 30 (Übung)

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, welche durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3-x^2y}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben ist.

**a)** Zeigen Sie, dass $f$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

**b)** Berechnen Sie für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ alle partiellen Ableitungen von $f$.

**c)** Sind die partiellen Ableitungen von $f$ im Punkt $(0,0)$ stetig?

**d)** Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ für jede Richtung $v$, für die das möglich ist. Für welche $v$ gilt $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = (\nabla f(0,0)) \cdot v$?

## Aufgabe 31 (Tutorium)

Betrachten Sie die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, welche durch

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben ist.

**a)** Zeigen Sie, dass $g$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

**b)** Berechnen Sie für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ alle partiellen Ableitungen von $g$.

**c)** Sind die partiellen Ableitungen von $g$ im Punkt $(0,0)$ stetig?

**d)** Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial g}{\partial v}(0,0)$ für jede Richtung $v$, für die das möglich ist. Für welche $v$ gilt $\frac{\partial g}{\partial v}(0,0) = (\nabla g(0,0)) \cdot v$?

## Aufgabe 32 (Übung)

Betrachten Sie die Funktionen $f : D \to \mathbb{R}^3$ und $g : E \to \mathbb{R}$ mit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y > 0\right\}$ und $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\right\}$, sowie

$$f(x,y) = (\log(xy), \cos(x^2+y), e^x) \qquad \text{und} \qquad g(x,y,z) = e^x + yz + \log(z)$$

**a)** Berechnen Sie die Ableitungen $f', g'$.

**b)** Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung $(g \circ f)'$.

**c)** Berechnen Sie die Ableitung $(g \circ f)'$, indem Sie $g \circ f$ explizit berechnen und dann ableiten.

## Aufgabe 33 (Tutorium)

Betrachten Sie die Funktionen $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche durch

$$f(x,y) = (x^2, y^2), \qquad g(x,y) = (\sin(xy), e^{x+y}), \qquad h(x,y) = (e^x \cos(y), \sinh(x))$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben sind.

**a)** Berechnen Sie die Ableitungen $f', g', h'$.

**b)** Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel die Ableitungen $(g \circ f)', (h \circ g)'$.

**c)** Berechnen Sie die Ableitungen $(g \circ f)', (h \circ g)'$, indem Sie $g \circ f$ bzw. $h \circ g$ explizit berechnen und dann ableiten.