Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

SS 2015
17.05.2015

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 28 (Übung)

a) Die Kurve $\gamma : (-1,1) \to \mathbb{R}^3$ sei durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \arcsin(t) \\ t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix} \qquad \forall t \in (-1,1)$$

gegeben. Ist γ eine reguläre Kurve? Bestimmen Sie ihre Länge $L(\gamma)$ und natürliche Parameterisierung.

b) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y,z) := \begin{cases} \frac{x^2y^2z}{x^4+y^4+z^4}, & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}, \\ 0, & (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ in denen f (partiell) differenzierbar ist.

Lösungsvorschlag

a) Es gilt

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \\ 1 \\ -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{\frac{1}{1-t^2} + 1 + \frac{t^2}{1-t^2}} = \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \neq 0$$

für alle $t \in (-1,1)$. Deshalb ist γ regulär. Ferner gilt:

$$s(t) := \int_{-1}^{t} \|\gamma'(\tau)\| \,\mathrm{d}\tau = \sqrt{2}\left(\arcsin(t) - \arcsin(-1)\right) = \sqrt{2}\left(\arcsin(t) + \frac{\pi}{2}\right)$$

für alle $t \in [-1,1]$. Es ist also $L(\gamma) = s(1) = \sqrt{2}\pi$. Die Umkehrfunktion $s^{-1} : [0, \sqrt{2}\pi] \to \mathbb{R}$ ist durch

$$s^{-1}(t) = \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$

für alle $t \in [0, \sqrt{2}\pi]$ gegeben. Die natürliche Parameterisierung von γ ist dann durch

$$\gamma \circ s^{-1}(t) = \gamma\left(-\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right) = \begin{pmatrix} \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2} \\ -\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \\ \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \end{pmatrix}$$

für alle $t \in [0, \sqrt{2}\pi]$ gegeben.

b) *Behauptung:* f ist partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^3$ und differenzierbar auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.
Beweis: Sei $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Nach den Ableitungsregeln für skalarwertige Funktionen gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{2xy^2z(x^4+y^4+z^4) - 4x^5y^2z}{(x^4+y^4+z^4)^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{2x^2yz(x^4+y^4+z^4) - 4x^2y^5z}{(x^4+y^4+z^4)^2} \quad \text{und}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{x^2y^2(x^4+y^4+z^4) - 4x^2y^2z^4}{(x^4+y^4+z^4)^2}.$$

Diese partiellen Ableitungen sind stetig auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Damit ist f differenzierbar auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.
Sei nun $(x,y,z) = (0,0,0)$. Für $t \neq 0$ gilt

$$\frac{1}{t}\Big(f(t,0,0) - f(0,0,0)\Big) = 0 \to 0$$

für $t \to 0$. Somit ist $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) = 0$. Analog erhält man $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)$. Insgesamt ist damit f partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^3$.
Wir zeigen nun noch, dass f in $(0,0,0)$ nicht differenzierbar ist. Angenommen f ist in $(0,0,0)$ differenzierbar. Dann gilt nach Satz 19.6, dass für $h \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$

$$\frac{1}{|h|}\left(f(h_1,h_2,h_3) - f(0,0,0) - A \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}\right) \to 0$$

für $h \to (0,0,0)$ mit

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0), \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)\right) = (0,0,0).$$

Zusammen mit $f(0,0,0) = 0$ ergibt sich $\lim\limits_{(h_1,h_2,h_3)\to(0,0,0)} \frac{f(h_1,h_2,h_3)}{|h|} = 0$. Sei nun $\left(h^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $h^{(n)} := \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $h^{(n)} \to (0,0,0)$ und

$$\frac{f(h^{(n)})}{|h^{(n)}|} = \frac{\frac{n^{-5}}{3n^{-4}}}{\sqrt{3n^{-1}}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \not\to 0$$

für $n \to \infty$, was $\lim\limits_{(h_1,h_2,h-3)\to(0,0,0)} \frac{f(h_1,h_2,h_3)}{|h|} = 0$ widerspricht. Also ist f nicht differenzierbar in $(0,0,0)$.

Aufgabe 29 (Tutorium)

a) Die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ sei durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \frac{2t}{\pi} \end{pmatrix} \qquad \forall t \in [0, 2\pi]$$

gegeben. Ist γ eine reguläre Kurve? Bestimmen Sie ihre Länge $L(\gamma)$ und natürliche Parametrisierung.

b) Seien $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \|x\|^k & , x \neq 0, \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}^n$ in denen f (partiell) differenzierbar ist und geben Sie, wenn möglich, ∇f an.

Lösungsvorschlag

a) Es gilt

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ \frac{2}{\pi} \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + \frac{4}{\pi^2}} = \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}} \neq 0$$

für alle $t \in [0, 2\pi]$. Deshalb ist γ regulär. Ferner gilt:

$$s(t) := \int_0^t \|\gamma'(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau = \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}} t$$

für alle $t \in [0, 2\pi]$. Es ist also $L(\gamma) = s(2\pi) = 2\sqrt{\pi^2 + 4}$. Die natürliche Parameterisierung von γ ist durch

$$\gamma \circ s^{-1}(t) = \gamma\left(\frac{\pi}{\sqrt{4 + \pi^2}} t\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{4+\pi^2}} t\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{4+\pi^2}} t\right) \\ \frac{2}{\sqrt{4+\pi^2}} t \end{pmatrix}$$

für alle $t \in [0, 2\sqrt{\pi^2 + 4}]$ gegeben.

b) Für $x \neq 0$ gilt

$$f(x) = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{k}{2}},$$

womit f dort partiell differenzierbar ist mit

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = 2x_j (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{k}{2}-1} = 2x_j \|x\|^{k-2} \qquad \forall j \in \{1, \ldots, n\}.$$

In $x = 0$ gilt für $t \neq 0$

$$\frac{f(0 + te_j) - f(0)}{t} = \frac{|t|^k}{t}.$$

Somit existiert $\frac{\mathrm{d}f}{\partial x_j}(0)$ für $k \leqslant 1$ nicht (für $k < 1$ strebt der Ausdruck dem Betrage nach gegen unendlich, für $k = 1$ ergeben sich unterschiedliche einseitige Grenzwerte ± 1). Folglich ist f für $k \leqslant 1$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (partiell) differenzierbar, da alle partiellen Ableitungen existieren und stetig sind. In 0 existiert keine partielle Ableitung, womit f nicht (partiell) differenzierbar ist.

Für $k > 1$ existiert der obige Grenzwert für $t \to 0$ und liefert $\frac{\partial f}{\partial x_j}(0) = 0$.

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right| = 2|x_j|\|x\|^{k-2} \leqslant 2\|x\|\|x\|^{k-2} = 2\|x\|^{k-1} \xrightarrow{x\to 0} 0,$$

womit alle partiellen Ableitungen auf ganz $\mathbb{R}^n$ existieren und stetig sind. In diesem Fall ist f also auf ganz $\mathbb{R}^n$ (partiell) differenzierbar. Die Ableitung von f ist gegeben durch

$$(\nabla f)(x) = \begin{cases} 2\|x\|^{k-2}x & , x \neq 0, \\ 0 & , x = 0 \quad (\text{für } k > 1). \end{cases}$$

Aufgabe 30 (Übung)

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, welche durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3 - x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben ist.

a) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

b) Berechnen Sie für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ alle partiellen Ableitungen von f.

c) Sind die partiellen Ableitungen von f im Punkt $(0,0)$ stetig?

d) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ für jede Richtung v, für die das möglich ist. Für welche v gilt $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = (\nabla f(0,0)) \cdot v$?

Lösungsvorschlag

a) Klar: f ist als Komposition stetiger Funktionen stetig in allen $(x,y) \neq (0,0)$. Ferner gilt

$$\left|\frac{y^3 - x^2 y}{x^2 + y^2}\right| = |y|\left|\frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2}\right| \leq |y|\frac{y^2 + x^2}{x^2 + y^2} = |y|$$

für alle $(x,y) \neq (0,0)$. Deshalb gilt in der Tat $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$. Also ist f stetig auf $\mathbb{R}^2$.

b) Für $(x,y) \neq 0$ gilt nach der Quotientenregel

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\frac{-2x(x^2+y^2) - (y^2 - x^2)2x}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

bzw.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(3y^2 - x^2)(x^2+y^2) - (y^3 - x^2 y)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^4 + 4x^2y^2 - x^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

Im Punkt $(0,0)$ gilt hingegen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

bzw.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3}{h^2}}{h} = 1.$$

c) Betrachte $(x_k, y_k) := (\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \to (0,0)$ für $k \to \infty$. Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_k, y_k) = -\frac{4\frac{1}{k^4}}{4\frac{1}{k^4}} = -1 \not\to 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

Also ist $\frac{\partial f}{\partial x}$ unstetig bei $(0,0)$.

Betrachte $(x_k, y_k) = (\frac{1}{k}, 0) \to (0,0)$ für $k \to \infty$. Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_k, y_k) = -\frac{\frac{1}{k^4}}{\frac{1}{k^4}} = -1 \not\to 1 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Also ist auch $\frac{\partial f}{\partial y}$ unstetig bei $(0,0)$.

d) Sei $v = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Nach Definition gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(tv)-f((0,0))}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^3(v_y^3 - v_x^2 v_y)}{t^3(v_x^2+v_y^2)} = \frac{v_y^3 - v_x^2 v_y}{v_x^2+v_y^2}$$

Ferner ist $(\nabla f)(0,0)\cdot v = v_y$. Also gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = (\nabla f)(0,0)\cdot v \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{v_y^3 - v_x^2 v_y}{v_x^2+v_y^2} = v_y \\
&\Leftrightarrow \quad v_y^3 - v_x^2 v_y = v_x^2 v_y + v_y^3 \\
&\Leftrightarrow \quad v_x^2 v_y = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad v_x = 0 \lor v_y = 0
\end{aligned}$$

Aufgabe 31 (Tutorium)

Betrachten Sie die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, welche durch

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben ist.

a) Zeigen Sie, dass g auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

b) Berechnen Sie für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ alle partiellen Ableitungen von g.

c) Sind die partiellen Ableitungen von g im Punkt $(0,0)$ stetig?

d) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial g}{\partial v}(0,0)$ für jede Richtung v, für die das möglich ist. Für welche v gilt $\frac{\partial g}{\partial v}(0,0) = (\nabla g(0,0))\cdot v$?

LÖSUNGSVORSCHLAG

a) Klar: g ist als Komposition stetiger Funktionen stetig in allen $(x,y) \neq (0,0)$. Es ist $|\sin(x)| = \sin(|x|)$ für alle $x \in [-\pi, \pi]$. Ferner gilt $\sin(x) \leq x$ für alle $x \in [0, \infty)$. Es folgt

$$|\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}| = \frac{\sin(|x^3+y^3|)}{x^2+y^2} \leq \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2} \leq \frac{\overbrace{|x|^3+|y|^3}^{\leq 2\max\{x,y\}^3}}{\underbrace{x^2+y^2}_{\geq \max\{x,y\}^2}} \leq 2\max\{x,y\}$$

für alle $(x,y) \neq (0,0)$ mit $\max\{x,y\} \leq 1$. Wenn $\sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\| \to 0$, so gilt sowohl $x \to 0$ als auch $y \to 0$, somit auch $\max\{x,y\} \to 0$. Deshalb gilt in der Tat $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0 = g(0,0)$. Also ist g stetig auf $\mathbb{R}^2$.

b) Wegen $g(x,y) = g(y,x)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$, reicht es aus, lediglich $\frac{\partial g}{\partial x}$ auszurechnen. Es ist dann $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(y,x)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Für $(x,y) \neq 0$ gilt nach der Quotientenregel

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2(x^2+y^2)\cos(x^3+y^3) - 2x\sin(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Im Punkt $(0,0)$ gilt hingegen

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h,0)-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h^3)}{h^3} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{3h^2\cos(h^3)}{3h^2} = 1.$$

c) Betrachte $(x_k, y_k) := (0, \frac{1}{k}) \to (0,0)$ für $k \to \infty$. Es ist

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_k, y_k) = 0\frac{1}{k^4} = 0 \not\to 1 = \frac{\partial g}{\partial x}(0,0).$$

Also sind $\frac{\partial g}{\partial x}$ und $\frac{\partial g}{\partial y}$ unstetig bei $(0,0)$.

d) Sei $v = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Nach Definition gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial v}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{g(tv) - g((0,0))}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t^3(v_x^3+v_y^3))}{t^3(v_x^2+v_y^2)} \\
&\overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{3t^2(v_x^3+v_y^3)\cos(t^3(v_x^3+v_y^3))}{3t^2(v_x^2+v_y^2)} = \frac{v_x^3+v_y^3}{v_x^2+v_y^2}
\end{aligned}$$

Ferner ist $(\nabla g)(0,0) \cdot v = v_x + v_y$. Also gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial v}(0,0) = (\nabla g)(0,0)\cdot v \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{v_x^3+v_y^3}{v_x^2+v_y^2} = v_x + v_y \\
&\Leftrightarrow \quad v_x^3 + v_y^3 = v_x^3 + v_y^3 + v_x^2 v_y + v_x v_y^2 \\
&\Leftrightarrow \quad -v_x^2 v_y = v_x v_y^2 \\
&\Leftrightarrow \quad v_x = 0 \vee v_y = 0 \vee v_x = -v_y
\end{aligned}$$

Aufgabe 32 (Übung)

Betrachten Sie die Funktionen $f : D \to \mathbb{R}^3$ und $g : E \to \mathbb{R}$ mit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\right\}$ und $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\right\}$, sowie

$$f(x,y) = (\log(xy), \cos(x^2+y), e^x) \qquad \text{und} \qquad g(x,y,z) = e^x + yz + \log(z)$$

a) Berechnen Sie die Ableitungen f', g'.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung $(g \circ f)'$.

c) Berechnen Sie die Ableitung $(g \circ f)'$, indem Sie $g \circ f$ explizit berechnen und dann ableiten.

Lösungsvorschlag

a) Da alle partielle Ableitungen stetig sind, ist f differenzierbar und es gilt für alle $(x,y) \in D$:

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} \\ -2x\sin(x^2+y) & -\sin(x^2+y) \\ e^x & 0 \end{pmatrix}$$

Ebenfalls ist g differenzierbar und es gilt für alle $(x,y,z) \in E$:

$$g'(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & z & y + \frac{1}{z} \end{pmatrix}$$

b) Für alle $(x,y) \in D$ gilt

$$g'(f(x,y)) = \begin{pmatrix} xy & e^x & \cos(x^2y^2) + e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Dementsprechend ergibt sich mit Hilfe der Kettenregel

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(x,y) = g'(f(x,y)) \cdot f'(x,y) &= \begin{pmatrix} y - 2xe^x\sin(x^2+y) + 1 + e^x\cos(x^2+y) & x - e^x\sin(x^2+y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y + e^x(\cos(x^2+y) - 2x\sin(x^2+y)) + 1 & x - e^x\sin(x^2+y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in D$.

c) Direkte Rechnung ergibt

$$(g \circ f)(x,y) = xy + e^x\cos(x^2+y) + x$$

für alle $(x,y) \in D$. Dementsprechend ist

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial(g\circ f)}{\partial x} & \frac{\partial(g\circ f)}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y + e^x\cos(x^2+y) - 2xe^x\sin(x^2+y) + 1 & x - e^x\sin(x^2+y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y + e^x(\cos(x^2+y) - 2x\sin(x^2+y)) + 1 & x - e^x\sin(x^2+y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in D$.

Aufgabe 33 (Tutorium)

Betrachten Sie die Funktionen $f,g,h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, welche durch

$$f(x,y)=(x^2,y^2),\qquad g(x,y)=(\sin(xy),e^{x+y}),\qquad h(x,y)=(e^x\cos(y),\sinh(x))$$

für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ gegeben sind.

a) Berechnen Sie die Ableitungen f',g',h'.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel die Ableitungen $(g\circ f)',(h\circ g)'$.

c) Berechnen Sie die Ableitungen $(g\circ f)',(h\circ g)'$, indem Sie $g\circ f$ bzw. $h\circ g$ explizit berechnen und dann ableiten.

Lösungsvorschlag

a) Da alle partielle Ableitungen stetig sind, sind f, g und h differenzierbar und es gilt für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$f'(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x & 0\\ 0 & 2y\end{pmatrix},$$

$$g'(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\cos(xy) & x\cos(xy)\\ e^{x+y} & e^{x+y}\end{pmatrix},\ \text{sowie}$$

$$h'(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial h_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial h_1}{\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial h_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial h_2}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^x\cos(y) & -e^x\sin(y)\\ \cosh(x) & 0\end{pmatrix}.$$

b) Für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ gilt

$$g'(f(x,y))=\begin{pmatrix}y^2\cos(x^2y^2) & x^2\cos(x^2y^2)\\ e^{x^2+y^2} & e^{x^2+y^2}\end{pmatrix},\ \text{sowie}$$

$$h'(g(x,y))=\begin{pmatrix}e^{\sin(xy)}\cos(e^{x+y}) & -e^{\sin(xy)}\sin(e^{x+y})\\ \cosh(\sin(xy)) & 0\end{pmatrix}.$$

Dementsprechend ergibt sich mit Hilfe der Kettenregel

$$(g\circ f)'(x,y)=g'(f(x,y))\cdot f'(x,y)=\begin{pmatrix}2xy^2\cos(x^2y^2) & 2x^2y\cos(x^2y^2)\\ 2xe^{x^2+y^2} & 2ye^{x^2+y^2}\end{pmatrix},\ \text{sowie}$$

$$\begin{aligned}&(h\circ g)'(x,y)=h'(g(x,y))\cdot g'(x,y)\\ =\ &\begin{pmatrix}y\cos(xy)\cos(e^{x+y})e^{\sin(xy)}-e^{x+y}e^{\sin(xy)}\sin(e^{x+y}) & x\cos(xy)\cos(e^{x+y})e^{\sin(xy)}-e^{x+y}e^{\sin(xy)}\sin(e^{x+y})\\ y\cos(xy)\cosh(\sin(xy)) & x\cos(xy)\cosh(\sin(xy))\end{pmatrix}\end{aligned}$$

für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

c) Direkte Rechnung ergibt

$$(g\circ f)(x,y)=\begin{pmatrix}\sin(x^2y^2) & e^{x^2+y^2}\end{pmatrix},\ \text{sowie}$$

$$(h\circ g)(x,y)=\begin{pmatrix}e^{\sin(xy)}\cos(e^{x+y}) & \sinh(\sin(xy))\end{pmatrix}.$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Dementsprechend ist

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial (g\circ f)_1}{\partial x} & \frac{\partial (g\circ f)_1}{\partial y} \\ \frac{\partial (g\circ f)_2}{\partial x} & \frac{\partial (g\circ f)_2}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y + e^x \cos(x^2+y) - 2xe^x \sin(x^2+y) + 1 & x - e^x \sin(x^2+y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y + e^x (\cos(x^2+y) - 2x \sin(x^2+y)) + 1 & x - e^x \sin(x^2+y) \end{pmatrix}, \text{ sowie}\end{aligned}$$

$$(h \circ g)'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial (h\circ g)_1}{\partial x} & \frac{\partial (h\circ g)_1}{\partial y} \\ \frac{\partial (h\circ g)_2}{\partial x} & \frac{\partial (h\circ g)_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y\cos(xy)e^{\sin(xy)}\cos(e^{x+y}) - e^{\sin(xy)}e^{x+y}\sin(e^{x+y}) & x\cos(xy)e^{\sin(xy)}\cos(e^{x+y}) - e^{\sin(xy)}e^{x+y}\sin(e^{x+y}) \\ y\cos(xy)\cosh(\sin(xy)) & x\cos(xy)\cosh(\sin(xy)) \end{pmatrix}$$

für alle $(x, y) \in D$.