KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

SS 2015
24.05.2015

HÖHERE MATHEMATIK II FÜR DIE FACHRICHTUNG PHYSIK

7. ÜBUNGSBLATT

AUFGABE 34 (ÜBUNG)

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \cosh(x)\cos(y) \\ \sinh(x)\sin(y) \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben ist.

a) Zeigen Sie, dass es eine offene Menge $U \ni (\log(2), \frac{\pi}{2})$ und eine offene Menge $V \ni (0, \frac{3}{4})$ gibt, so dass U durch f bijektiv auf V abgebildet wird. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion in $(0, \frac{3}{4})$.

b) Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x > 0$ lokal invertierbar ist, aber dass f auf dieser Menge nicht injektiv ist.

AUFGABE 35 (TUTORIUM)

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} (2 + \arctan(x))\sin(y) \\ -e^x\cos(y) \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben ist.

a) Zeigen Sie, dass es eine offene Menge $U \ni (0, \frac{\pi}{4})$ und eine offene Menge $V \ni (\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ gibt, so dass U durch f bijektiv auf V abgebildet wird. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion in $(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

b) Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ lokal invertierbar ist, aber dass $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nicht injektiv ist.

AUFGABE 36 (ÜBUNG)

Es sei $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x + y + z > 1) \wedge (y + z > -1)\right\}$ und $F : D \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x,y,z) = \frac{1}{1 + y + z} + \log(x + y + z - 1)$$

für alle $(x,y,z) \in D$.

a) Zeigen Sie, dass eine offene Menge $(\frac{1}{\sqrt{e}}, 0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine offene Menge $1 \in V \subseteq \mathbb{R}$, sowie ein $g \in C^1(U,V)$ existieren mit $F(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow z = g(x,y)$ für alle $(x,y) \in U$ und alle $z \in V$. Bestimmen Sie außerdem $g'(\frac{1}{\sqrt{e}}, 0)$.

b) Zeigen Sie, dass eine offene Menge $\frac{1}{\sqrt{e}} \in U_1 \subseteq \mathbb{R}$ und eine offene Menge $0 \in U_2 \subseteq \mathbb{R}$, sowie ein streng monoton fallendes $g_1 \in C^1(U_1, \mathbb{R})$ existieren mit $g(x,y) = g_1(x) - y$ für alle $x \in U_1$ und alle $y \in U_2$.

Aufgabe 37 (Tutorium)

a) Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x,y,z) = z^3 + 2z^2 - 3xyz + x^3 - y^3$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass eine offene Menge $(0,0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine offene Menge $-2 \in V \subseteq \mathbb{R}$, sowie ein $g \in C^1(U,V)$ existieren mit

$$F(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow z = g(x,y)$$

für alle $(x,y) \in U$ und alle $z \in V$. Berechnen Sie g'.

b) Betrachten Sie die Gleichungen

$$x^2 + y^2 - u^2 + v^2 = 0 \qquad \text{und} \qquad x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 = 1$$

mit $(x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4$. Zeigen Sie, dass durch diese Gleichungen auf einer offenen Menge $(0,0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ zwei Funktionen $u, v \in C^1(U)$ mit $u(0,0) = v(0,0) = 1$ implizit definiert werden. Berechnen Sie $u'(0,0)$ sowie $v'(0,0)$.

Aufgabe 38 (Übung)

a) Bestimmen Sie das zweite Taylorpolynom der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x\mathrm{e}^z - y^2$ in $(x_0, y_0, z_0) = (1, -1, 0)$.

b) Bestimmen Sie alle Stellen lokaler Extrema der jeweiligen Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x,y) = 2x^3 - 3xy + 2y^3 - 3 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

und entscheiden Sie, ob es sich dabei um Maxima oder Minima handelt.

Aufgabe 39 (Tutorium)

a) Bestimmen Sie das zweite Taylorpolynom der Funktion $f : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^y$ in $(x_0, y_0) = (1, 3)$.

b) Bestimmen Sie alle Stellen lokaler Extrema der jeweiligen Funktion und entscheiden Sie, ob es sich dabei um Maxima oder Minima handelt.

(i) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = xy + x - 2y - 2 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

(ii) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = (2x + 2y + 3)e^{-x^2 - y^2} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$