Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

SS 2015
24.05.2015

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 34 (Übung)

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \cosh(x)\cos(y) \\ \sinh(x)\sin(y) \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben ist.

a) Zeigen Sie, dass es eine offene Menge $U \ni (\log(2), \frac{\pi}{2})$ und eine offene Menge $V \ni (0, \frac{3}{4})$ gibt, so dass U durch f bijektiv auf V abgebildet wird. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion in $(0, \frac{3}{4})$.

b) Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x > 0$ lokal invertierbar ist, aber dass f auf dieser Menge nicht injektiv ist.

Lösungsvorschlag

Wir berechnen vorbereitend für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sinh(x)\cos(y) & -\cosh(x)\sin(y) \\ \cosh(x)\sin(y) & \sinh(x)\cos(y) \end{pmatrix}$$

a) Wir stellen die Voraussetzungen des Umkehrsatzes (19.11) sicher. Es ist in der Tat

$$f\left(\log(2), \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \cosh(\log(2))\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \sinh(\log(2))\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Wir versuchen die Inverse von

$$f'\left(\log(2), \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

zu berechnen:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -\frac{5}{4} & 1 & 0 \\ \frac{5}{4} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrows \sim \left(\begin{array}{cc|cc} \frac{5}{4} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{4} & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} | \cdot \frac{4}{5} \\ | \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 \end{array}\right)$$

Also ist $f'\left(\log(2), \frac{\pi}{2}\right)$ in der Tat invertierbar. Nach dem Umkehrsatz existieren die gesuchten offenen Mengen U und V. Ebenfalls nach dem Umkehrsatz gilt für die Ableitung der

Umkehrfunktion $f^{-1}: V \to U$

$$(f^{-1})'\left(0, \frac{3}{4}\right) = (f^{-1})'\left(f\left(\log(2), \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left[f'\left(\log(2), \frac{\pi}{2}\right)\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

b) Es gilt nach obiger Rechnung

$$\det(f'(x,y)) = \sinh^2(x)\cos^2(y) + \cosh^2(x)\sin^2(y)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Wegen $\sin(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \pi\mathbb{Z}$ und $\cos(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \pi(\frac{1}{2} + \mathbb{Z})$ werden die $\sin^2$ bzw. $\cos^2$-Terme nie gleichzeitig verschwinden. Also ist $\det(f'(x,y)) > 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x \neq 0$. Damit ist der Umkehrsatz überall anwendbar, d.h. f ist überall lokal invertierbar.

Wegen

$$f(x, y + 2\pi) = \begin{pmatrix} \cosh(x)\cos(y + 2\pi) \\ \sinh(x)\sin(y + 2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(x)\cos(y) \\ \sinh(x)\sin(y) \end{pmatrix} = f(x,y)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (mit $x > 0$) ist f nicht injektiv.

Aufgabe 35 (Tutorium)

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} (2 + \arctan(x))\sin(y) \\ -e^x \cos(y) \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben ist.

a) Zeigen Sie, dass es eine offene Menge $U \ni (0, \frac{\pi}{4})$ und eine offene Menge $V \ni (\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ gibt, so dass U durch f bijektiv auf V abgebildet wird. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion in $(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

b) Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ lokal invertierbar ist, aber dass $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nicht injektiv ist.

Lösungsvorschlag

Wir berechnen vorbereitend für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sin(y)}{1+x^2} & (2 + \arctan(x))\cos(y) \\ -e^x \cos(y) & e^x \sin(y) \end{pmatrix}$$

a) Wir stellen die Voraussetzungen des Umkehrsatzes (19.11) sicher. Es ist in der Tat

$$f\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} (2 + \arctan(0))\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ -e^0 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Wir versuchen die Inverse von

$$f'\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

zu berechnen:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot(-\tfrac{2}{3})$$

$$\sim \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} | \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \\ | \cdot \frac{2}{3\sqrt{2}} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

Also ist $f'\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ in der Tat invertierbar. Nach dem Umkehrsatz existieren die gesuchten offenen Mengen U und V. Ebenfalls nach dem Umkehrsatz gilt für die Ableitung der Umkehrfunktion $f^{-1} : V \to U$

$$(f^{-1})'\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (f^{-1})'\left(f\left(0, \frac{\pi}{4}\right)\right) = \left[f'\left(0, \frac{\pi}{4}\right)\right]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

b) Es gilt nach obiger Rechnung

$$\det(f'(x,y)) = \frac{\sin^2(y)e^x}{1+x^2} + e^x(2 + \arctan(x))\cos^2(y)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Wegen $\sin(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \pi\mathbb{Z}$ und $\cos(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \pi(\frac{1}{2} + \mathbb{Z})$ werden die $\sin^2$ bzw. $\cos^2$-Terme nie gleichzeitig verschwinden. Also ist $\det(f'(x,y)) > 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Damit ist der Umkehrsatz überall anwendbar, d.h. f ist überall lokal invertierbar.

Wegen

$$f(x, y + 2\pi) = \begin{pmatrix} (2 + \arctan(x))\sin(y + 2\pi) \\ -e^x \cos(y + 2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 + \arctan(x))\sin(y) \\ -e^x \cos(y) \end{pmatrix} = f(x,y)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist f nicht injektiv.

Aufgabe 36 (Übung)

Es sei $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x + y + z > 1) \wedge (y + z > -1)\right\}$ und $F : D \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x,y,z) = \frac{1}{1 + y + z} + \log(x + y + z - 1)$$

für alle $(x,y,z) \in D$.

a) Zeigen Sie, dass eine offene Menge $(\frac{1}{\sqrt{e}}, 0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine offene Menge $1 \in V \subseteq \mathbb{R}$, sowie ein $g \in C^1(U, V)$ existieren mit $F(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow z = g(x,y)$ für alle $(x,y) \in U$ und alle $z \in V$.

b) Zeigen Sie, dass eine offene Menge $\frac{1}{\sqrt{e}} \in U_1 \subseteq \mathbb{R}$ und eine offene Menge $0 \in U_2 \subseteq \mathbb{R}$, sowie ein streng monoton fallendes $g_1 \in C^1(U_1, \mathbb{R})$ existieren mit $g(x,y) = g_1(x) - y$ für alle $x \in U_1$ und alle $y \in U_2$.

LÖSUNGSVORSCHLAG

a) Klar: $F \in C^1(D)$. Ferner gilt

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, 0, 1\right) = \frac{1}{1+0+1} + \log\left(\frac{1}{\sqrt{e}} + 0 + 1 - 1\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0,$$

sowie

$$\begin{aligned} F'(x,y,z) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{x+y+z-1} & -\frac{1}{(1+y+z)^2} + \frac{1}{x+y+z-1} & -\frac{1}{(1+y+z)^2} + \frac{1}{x+y+z-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $(x,y,z) \in D$. Insbesondere ist

$$\frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, 0, 1\right) = -\frac{1}{(1+0+1)^2} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{e}} + 0 + 1 - 1} = \sqrt{e} - \frac{1}{4} \neq 0.$$

Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen (19.12), existieren U, V und g mit den geforderten Eigenschaften. Außerdem folgt

$$g'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, 0\right) = -\left(\frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, 0, 1\right)\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, 0, 1\right) \quad \frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, 0, 1\right)\right) = -\begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{4\sqrt{e}-1} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Für die Ableitung g' gilt

$$\begin{aligned} g'(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = -\left(\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,g(x,y))\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial (x,y)}(x,y,g(x,y)) \\ &= \frac{1}{\frac{1}{(1+y+g(x,y))^2} - \frac{1}{x+y+g(x,y)-1}} \begin{pmatrix} \frac{1}{x+y+g(x,y)-1} & -\frac{1}{(1+y+g(x,y))^2} + \frac{1}{x+y+g(x,y)-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\frac{x+y+g(x,y)-1}{(1+y+g(x,y))^2} - 1} & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in U$. Wähle $\varepsilon > 0$ so klein, dass

$$\left(\frac{1}{\sqrt{e}} - \varepsilon, \frac{1}{\sqrt{e}} + \varepsilon\right) \times (-\varepsilon, +\varepsilon) =: U_1 \times U_2 \subseteq U$$

(dies funktioniert, weil U offen ist und $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, 0\right) \in U$). Nach dem Hauptsatz der Analysis gilt für jedes $x \in U_1$ und alle $y \in U_2$

$$g(x,y) = g(x,0) + \int_0^y \frac{\partial g}{\partial y}(x,t)\,\mathrm{d}t = g(x,0) - y$$

Setze $g_1(x) := g(x,0)$ für alle $x \in U_1$. Klar: $g_1 \in C^1(U_1)$ und $g(x,y) = g_1(x) - y$ für alle $x \in U_1$ und alle $y \in U_2$. Bleibt nachzuweisen, dass g_1 streng monoton fallend ist. Betrachte dazu

$$g_1'(x) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,0) = \frac{1}{\frac{x+0+g(x,0)-1}{(1+0+g(x,0))^2} - 1} = \frac{1}{\frac{x+g_1(x)-1}{(1+g_1(x))^2} - 1}$$

für alle $x \in U_1$. Insbesondere ist, wegen $g_1\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, 0\right) = 1$, für $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ ist

$$g'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{\frac{\frac{1}{\sqrt{e}}+1-1}{(1+1)^2} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{4\sqrt{e}} - 1}.$$

Das Vorzeichen des Nenners ist wegen $1 < \sqrt{e}$ bzw. $\frac{1}{4\sqrt{e}} < \frac{1}{4}$ negativ. Damit ist $g'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) < 0$. Da g_1' stetig ist, lässt sich ε nötigenfalls verkleinern, damit $g'(x) < 0$ für alle $x \in U_1$ gilt. Also ist g_1 in der Tat streng monoton fallend auf einer offenen Menge $\frac{1}{\sqrt{e}} \in U_1$.

Aufgabe 37 (Tutorium)

a) Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x, y, z) = z^3 + 2z^2 - 3xyz + x^3 - y^3$$

für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass eine offene Menge $(0, 0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine offene Menge $-2 \in V \subseteq \mathbb{R}$, sowie ein $g \in C^1(U, V)$ existieren mit

$$F(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = g(x, y)$$

für alle $(x, y) \in U$ und alle $z \in V$. Berechnen Sie g'.

b) Betrachten Sie die Gleichungen

$$x^2 + y^2 - u^2 + v^2 = 0 \qquad \text{und} \qquad x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 = 1$$

mit $(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4$. Zeigen Sie, dass durch diese Gleichungen auf einer offenen Menge $(0, 0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ zwei Funktionen $u, v \in C^1(U)$ mit $u(0, 0) = v(0, 0) = 1$ implizit definiert werden. Berechnen Sie $u'(0, 0)$ sowie $v'(0, 0)$.

Lösungsvorschlag

a) Klar: $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Ferner gilt $F(0, 0, -2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 = 0$, sowie

$$\begin{aligned} F'(x, y, z) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3yz + 3x^2 & -3xz - 3y^2 & 3z^2 + 4z - 3xy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Insbesondere ist $\frac{\partial F}{\partial z}(0, 0, -2) = 3(-2)^2 + 4(-2) = 4 \neq 0$. Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen (19.12), existieren U, V und g mit den geforderten Eigenschaften. Für die Ableitung g' gilt

$$\begin{aligned} g'(x, y) &= -\left(\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y))\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial (x, y)}(x, y, g(x, y)) \\ &= -\frac{1}{3g^2(x, y) + 4g(x, y) - 3xy} \cdot \begin{pmatrix} -3yg(x, y) + 3x^2 & -3xg(x, y) - 3y^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in U$.

b) Definiere $G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$G(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} x^2+y^2-u^2+v^2 \\ x^2+2y^2-3u^2+4v^2-1 \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4$. Die Aufgabe besteht offenbar darin, die Gleichung $G(x,y,u,v) = 0$ in der Nähe des Punktes $(x,y,u,v) = (0,0,1,1)$ nach (u,v) aufzulösen.

Klar: $G \in C^1(\mathbb{R}^4)$. Ferner gilt

$$G(0,0,1,1) = \begin{pmatrix} 0^2+0^2-(1)^2+(1)^2 \\ 0^2+2\cdot 0^2-3\cdot(1)^2+4\cdot(1)^2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

sowie

$$\begin{aligned} G'(x,y,u,v) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x}(x,y,u,v) & \frac{\partial G_1}{\partial y}(x,y,u,v) & \frac{\partial G_1}{\partial u}(x,y,u,v) & \frac{\partial G_1}{\partial v}(x,y,u,v) \\ \frac{\partial G_2}{\partial x}(x,y,u,v) & \frac{\partial G_2}{\partial y}(x,y,u,v) & \frac{\partial G_2}{\partial u}(x,y,u,v) & \frac{\partial G_2}{\partial v}(x,y,u,v) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2u & 2v \\ 2x & 4y & -6u & 8v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $(x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4$. Versuche die (2×2)-Matrix $\frac{\partial G}{\partial(u,v)}(0,0,1,1)$ zu invertieren:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial G}{\partial(u,v)}(0,0,1,1)\middle| I_2\right) &\sim \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 \\ -6 & 8 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-3) \\ + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ \cdot(-1) \end{matrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} |\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\ |\cdot\left(\frac{1}{2}\right) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &\sim \left(I_2 \middle| \left(\frac{\partial G}{\partial(u,v)}(0,0,1,1)\right)^{-1}\right) \end{aligned}$$

Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen (19.12) existiert eine offene Menge $(0,0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$, eine offene Menge $(1,1) \in V \subseteq \mathbb{R}^2$, sowie ein $g \in C^1(U,V)$ mit

$$G(x,y,u,v) = 0 \Leftrightarrow (u,v) = (g_1(x,y), g_2(x,y))$$

für alle $(x,y) \in U$ und alle $(u,v) \in V$. Für die Ableitung g' gilt

$$g'(x,y) = -\left(\frac{\partial G}{\partial(u,v)}(x,y,g(x,y))\right)^{-1} \cdot \frac{\partial G}{\partial(x,y)}(x,y,g(x,y))$$

für alle $(x,y) \in U$. Insbesondere gilt für $(x,y) = (0,0)$

$$g'(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $u'(0,0) = (0,0) = v'(0,0)$.

Aufgabe 38 (Übung)

a) Bestimmen Sie das zweite Taylorpolynom der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xe^z - y^2$ in $(x_0, y_0, z_0) = (1,-1,0)$.

b) Bestimmen Sie alle Stellen lokaler Extrema der jeweiligen Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\, g(x,y) = 2x^3 - 3xy + 2y^3 - 3 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

und entscheiden Sie, ob es sich dabei um Maxima oder Minima handelt.

Lösungsvorschlag

a) Das zweite Taylorpolynom von f in x_0 ist gegeben durch ($h = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$)

$$(T_2(f,(x_0,y_0,z_0)))(x,y,z) := f(x_0,y_0,z_0) + h \cdot (\nabla f)(x_0,y_0,z_0) + \frac{1}{2} h^T H_f(x_0,y_0,z_0) h.$$

Für f ergibt sich

$$(\nabla f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^z \\ -2y \\ x\mathrm{e}^z \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{e}^z \\ 0 & -2 & 0 \\ \mathrm{e}^z & 0 & x\mathrm{e}^z \end{pmatrix}.$$

Somit folgt

$$f(x_0,y_0,z_0) = 0, \qquad (\nabla f)(x_0,y_0,z_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad H_f(x_0,y_0,z_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich (schreibe $h = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$)

$$\begin{aligned}(T_2(f,(x_0,y_0,z_0)))(x,y,z) &= 0 + (x - x_0) + 2(y - y_0) + (z - z_0) + \frac{1}{2}(-2(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 + 2(x - x_0)(z - z_0)) \\ &= \frac{1}{2} z^2 - y^2 + xz + x + 2.\end{aligned}$$

b) Klar: $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Berechne g'. Es ist

$$g'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x^2 - 3y & -3x + 6y^2 \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Nach Satz 19.17 der Vorlesung ist $g'(x_0,y_0) = 0$ eine notwendige Bedingung für jede Stelle $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ eines lokalen Extremums von g. Berechne diese kritischen Punkte:

$$\begin{aligned} g'(x,y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (6x^2 - 3y = 0) \wedge (-3x + 6y^2 = 0) \Leftrightarrow (x = 2y^2) \wedge (6x^2 = 3y) \\ &\Leftrightarrow \quad (x = 2y^2) \wedge (24y^4 = 3y) \Leftrightarrow (x = y = 0) \vee \left(x = y = \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

Also sind $(x_0,y_0) = (0,0)$ und $(x_1,y_1) = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ genau die kritischen Punkte von g.
Berechne nun H_g. Es ist

$$H_g(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x & -3 \\ -3 & 12y \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

- Untersuche $H_g(x_0, y_0) =: A$ durch Bestimmung der Eigenwerte auf Definitheit: Das charakteristische Polynom p_A ist durch

  $$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & -3 \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3^2 = (\lambda - 3)(\lambda + 3)$$

  für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gegeben. Also sind ± 3 die Eigenwerte von A. Nach der Charakterisierung aus Satz 18.12 der Vorlesung ist also A indefinit. Nach Satz 19.17 der Vorlesung hat g in (x_0, y_0) kein lokales Extremum, sondern einen Sattelpunkt.

- Untersuche $H_g(x_1, y_1) =: B$ durch Bestimmung der Eigenwerte auf Definitheit: Das charakteristische Polynom p_B ist durch

  $$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & -3 \\ -3 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = (6 - \lambda)^2 - 3^2 = (3 - \lambda)(9 - \lambda)$$

  für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gegeben. Also sind 3 und 9 die Eigenwerte von B. Nach der Charakterisierung aus Satz 18.12 der Vorlesung ist also B positiv definit. Nach Satz 19.17 der Vorlesung hat g in (x_1, y_1) ein lokales Minimum.

Aufgabe 39 (Tutorium)

a) Bestimmen Sie das zweite Taylorpolynom der Funktion $f : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^y$ in $(x_0, y_0) = (1, 3)$.

b) Bestimmen Sie alle Stellen lokaler Extrema der jeweiligen Funktion und entscheiden Sie, ob es sich dabei um Maxima oder Minima handelt.

(i) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = xy + x - 2y - 2 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

(ii) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x, y) = (2x + 2y + 3)e^{-x^2 - y^2} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

Lösungsvorschlag

a) Das zweite Taylorpolynom von f in x_0 ist gegeben durch ($h = (x - x_0, y - y_0)$)

$$(T_2(f, (x_0, y_0)))(x, y) := f(x_0, y_0) + h \cdot (\nabla f)(x_0, y_0) + \frac{1}{2} h^T H_f(x_0, y_0) h.$$

Für f ergibt sich

$$(\nabla f)(x, y) = \begin{pmatrix} x^{y-1} y \\ -x^y \log(x) \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad H_f(x, y) = \begin{pmatrix} x^{y-2}(y^2 - y) & x^{y-1}(y \log(x) + 1) \\ x^{y-1}(y \log(x) + 1) & x^y (\log(x))^2 \end{pmatrix}.$$

Somit folgt

$$f(x_0, y_0) = 1, \qquad (\nabla f)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich (schreibe $h = (x - x_0, y - y_0)$)

$$(T_2(f, (x_0, y_0)))(x, y) = 1 + 3(x - x_0) + \frac{1}{2}(6(x - x_0)^2 + 2(x - x_0)(y - y_0)) = 3x^2 + 2xy - 12x - 2y + 7.$$

b) (i) Klar: $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Berechne g'. Es ist

$$g'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+1 & x-2 \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Nach Satz 19.17 der Vorlesung ist $g'(x_0,y_0) = 0$ eine notwendige Bedingung für jede Stelle $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ eines lokalen Extremums von g. Also ist $(x_0,y_0) = (2,-1)$ der einzige kritische Punkt von g.

Berechne nun $H_g(x_0,y_0)$. Es ist

$$H_g(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Untersuche $H_g(x_0,y_0) =: A$ durch Bestimmung der Eigenwerte auf Definitheit. Das charakteristische Polynom p_A ist durch

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gegeben. Also sind ± 1 die Eigenwerte von A. Nach der Charakterisierung aus Satz 18.12 der Vorlesung ist also A indefinit. Nach Satz 19.17 der Vorlesung hat f in (x_0,y_0) kein lokales Extremum, sondern einen Sattelpunkt.

(ii) Klar: $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Berechne h'. Es ist

$$h'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = 2e^{-x^2-y^2} \begin{pmatrix} 1 - x(2x+2y+3) & 1 - y(2x+2y+3) \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Nach Satz 19.17 der Vorlesung ist $h'(x_0,y_0) = 0$ eine notwendige Bedingung für jede Stelle $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ eines lokalen Extremums von h. Berechne diese kritischen Punkte:

$$\begin{aligned} h'(x,y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x(2x+2y+3) = y(2x+2y+3) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad (x = y \neq 0) \wedge (x(2x+2x+3) = 1) \\ &\Leftrightarrow \quad (x = y \neq 0) \wedge (x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} = 0) \\ &\Leftrightarrow \quad (x = y) \wedge \left(x \in \left\{ -\frac{3}{8} + \sqrt{\frac{9}{64} + \frac{1}{4}}, -\frac{3}{8} - \sqrt{\frac{9}{64} + \frac{1}{4}} \right\} \right) \\ &\Leftrightarrow \quad (x = y) \wedge \left(x \in \left\{ -1, \frac{1}{4} \right\} \right) \end{aligned}$$

Also sind $(x_0,y_0) = (-1,-1)$ und $(x_1,y_1) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ genau die kritischen Punkte von h.

Berechne nun H_h. Es ist

$$\begin{aligned} H_h(x,y) \quad &= \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial y}(x,y) \end{pmatrix} \\ &= \quad 2e^{-x^2-y^2} \begin{pmatrix} 4x^3 + 4x^2y + 6x^2 - 6x - 2y - 3 & 4x^2y + 4xy^2 + 6xy - 2x - 2y \\ 4x^2y + 4xy^2 + 6xy - 2x - 2y & 4y^3 + 4xy^2 + 6y^2 - 2x - 6y - 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Insbesondere ist

$$\begin{aligned} H_h(x,x) &= 2e^{-2x^2}\begin{pmatrix} 8x^3+6x^2-8x-3 & 8x^3+6x^2-4x \\ 8x^3+6x^2-4x & 8x^3+6x^2-8x-3 \end{pmatrix} \\ &= 2e^{-2x^2}\begin{pmatrix} 8x\left(x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)-3 & 8x\left(x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right) \\ 8x\left(x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right) & 8x\left(x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)-3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und

$$H_h(x_0,y_0) = \frac{2}{e^2}\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}_{=:A} \qquad \text{und} \qquad H_h(x_1,y_1) = -\frac{1}{\sqrt[8]{e}}\underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}}_{=:B}.$$

- Untersuche A durch Bestimmung der Eigenwerte auf Definitheit: Das charakteristische Polynom p_A ist durch

  $$p_A(\lambda) = \det(A-\lambda I_2) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 2^2 = (1-\lambda)(5-\lambda)$$

  für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gegeben. Also sind 1 und 5 die Eigenwerte von A. Nach der Charakterisierung aus Satz 18.12 der Vorlesung ist also A positiv definit. Damit ist auch $H_h(x_0,y_0)$ positiv definit. Nach Satz 19.17 der Vorlesung hat h in (x_0,y_0) ein lokales Minimum.
- Untersuche B durch Bestimmung der Eigenwerte auf Definitheit: Das charakteristische Polynom p_B ist durch

  $$p_B(\lambda) = \det(B-\lambda I_2) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 1 \\ 1 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)^2 - 1^2 = (8-\lambda)(10-\lambda)$$

  für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gegeben. Also sind 8 und 10 die Eigenwerte von B. Nach der Charakterisierung aus Satz 18.12 der Vorlesung ist also B positiv definit. Damit ist $H_h(x_1,y_1)$ negativ definit. Nach Satz 19.17 der Vorlesung hat h in (x_1,y_1) ein lokales Maximum.