Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

SS 2015
01.06.2015

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

8. Übungsblatt

Aufgabe 40 (Übung)

Es seien

$$A = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + 2x_2^2 = 6\right\} \quad \text{und} \quad B = \left\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 + y_2 = 5\right\}.$$

Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in A$ und ein y_0 in B existiert, mit

$$\|x_0 - y_0\| = d(A,B) := \inf_{x \in A, y \in B} \{\|x - y\|\}.$$

Berechnen Sie den Wert von $d(A,B)$ mit Hilfe der Multiplikatorenregel von Lagrange.

Aufgabe 41 (Tutorium)

Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y,z) := (x + y + z)^2$$

und der Ellipsoid

$$C := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 1\}$$

gegeben. Bestimmen Sie $\max(f(C))$ und $\min(f(C))$.

Aufgabe 42 (Übung)

Bestimmen Sie alle lokalen Minima und Maxima der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = 4x^2 - 3xy$$

auf der Menge

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}.$$

Aufgabe 43 (Tutorium)

Berechnen Sie die globalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y,z) = 5x + y - 3z$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ auf der Menge

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x + y + z = 0) \wedge (x^2 + y^2 + z^2 = 1)\right\}.$$

Aufgabe 44 (Übung)

a) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma f(x)\,\mathrm{d}s$ für

(i) $r>0$ und $\gamma:[0,\pi]\to\mathbb{R}^2$ definiert durch $\gamma(t):=\begin{pmatrix} r\cos t\\ r\sin t\end{pmatrix}$ sowie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y):=\arccos\left(\frac{x}{r}\right)+\frac{y}{r}$.

(ii) $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ definiert durch $\gamma(t):=\begin{pmatrix}\log(1+t^2)\\ 2\arctan(t)-t+3\end{pmatrix}$ mit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y):=y\mathrm{e}^{-x}$.

b) Überprüfen Sie jeweils, ob die Funktion f auf ihrem Definitionsbereich eine Stammfunktion besitzt und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

(i) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ mit $f(x,y,z):=\begin{pmatrix}y^2+2xz\\ z^2+2xy\\ x^2+2yz\end{pmatrix}$.

(ii) $f:\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ z>0\}\to\mathbb{R}^3$ mit $f(x,y,z):=\begin{pmatrix}x^2y\\ z\mathrm{e}^x\\ xy\log(z)\end{pmatrix}$.

Aufgabe 45 (Tutorium)

a) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma f(x)\,\mathrm{d}s$ für

(i) $r>0$ und $\gamma:[0,\pi]\to\mathbb{R}^2$ definiert durch $\gamma(t):=\begin{pmatrix}r\cos(t)\\ r\sin(t)\end{pmatrix}$ und $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y):=y$.

(ii) $\gamma:[0,\log(5)]\to\mathbb{R}^3$ definiert durch $\gamma(t):=\frac{\mathrm{e}^t}{2}\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$ und $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y,z):=x$.

b) Überprüfen Sie jeweils, ob die Funktion f auf ihrem Definitionsbereich eine Stammfunktion besitzt und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

(i) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ mit $f(x,y):=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^y+\cos(x)\cos(y)\\ x\mathrm{e}^y-\sin(x)\sin(y)\end{pmatrix}$.

(ii) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ mit $f(x,y,z):=\begin{pmatrix}y^2+2xyz^3\\ 2y+x^2z^3\\ y^2+3x^2yz^2\end{pmatrix}$.