Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

SS 2015
08.06.2015

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

9. Übungsblatt

Aufgabe 46 (Übung)

Berechnen Sie jeweils das Kurvenintegral

$$\int_\gamma f(x) \cdot \, \mathrm{d}x.$$

a) $f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{xy} \\ xy \end{pmatrix}$, $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$,

b) $f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$, $\gamma : \left[0, \frac{19}{4}\pi\right] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \frac{4\sqrt{2}t}{19\pi} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}$.

Aufgabe 47 (Tutorium)

Berechnen Sie jeweils das Kurvenintegral

$$\int_\gamma f(x) \cdot \, \mathrm{d}x.$$

a) $f(x,y,z) = e^{-xz} \begin{pmatrix} 2x - x^2 z - 5zy^3 \\ 15y^2 \\ -x^3 - 5xy^3 \end{pmatrix}$, $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 - t \\ \sin(\pi t) \end{pmatrix}$,

b) $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ -z \\ x \end{pmatrix}$, $\gamma : [0, \log(2)] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \sinh(t) \\ \cosh(t) \\ \sinh(t) \end{pmatrix}$.

Aufgabe 48 (Übung)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_A \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \, \mathrm{d}(x,y)$, $A = [0,1]^2$,

b) $\int_B xy + y^2 \, \mathrm{d}(x,y)$, $B = [0,1]^2$,

c) $\int_C \cosh(2x+y) \, \mathrm{d}(x,y)$, $C = [-1,0] \times [0,2]$.

Aufgabe 49 (Tutorium)

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\int_A \frac{1}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}(x,y)$, $A = [1,2]\times[3,4]$,

b) $\int_B y\sin(xy)\,\mathrm{d}(x,y)$, $B = [0,1]\times[0,\pi/2]$,

c) $\int_C \frac{x^2z^3}{1+y^2}\,\mathrm{d}(x,y,z)$, $C = [0,1]^3$,

d) $\int_D \sin(x+y+z)\,\mathrm{d}(x,y,z)$, $D = [0,\pi]^3$.

Aufgabe 50 (Übung)

Bestimmen Sie das Volumen der folgenden Mengen.

a) $M_{f,0}$, wobei $f : [0,1]\times[1,\sqrt{3}]$, $f(x,y) = \frac{1}{(x+y^2)^2}$,

b) $S_n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geqslant 0\ (1 \leqslant i \leqslant n), x_1 + \cdots + x_n \leqslant 1\}$, $n \in \mathbb{N}$ (*n-dimensionaler Standardsimplex*).

Aufgabe 51 (Tutorium)

Bestimmen Sie das Volumen der folgenden Mengen.

a) $M_{f,g}$, wobei $f,g : [1,2]^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \mathrm{e}^{x+y}$, $g(x,y) = x^2y$ (zeigen Sie zunächst, dass $g \leqslant f$ auf $[1,2]^2$),

b) $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant y\mathrm{e}^{-x} \leqslant b, c \leqslant y \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant d\}$, $0 < a < b < c < d$

c) $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z \geqslant 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leqslant 1\}$.