Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

SS 2015
08.06.2015

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 9. Übungsblatt

Aufgabe 46 (Übung)

Berechnen Sie jeweils das Kurvenintegral

$$\int_\gamma f(x)\cdot \,\mathrm{d}x.$$

a) $f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{xy} \\ xy \end{pmatrix}$, $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$,

b) $f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}$, $\gamma : \left[0, \frac{19}{4}\pi\right] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \frac{4\sqrt{2}t}{19\pi}\begin{pmatrix} \cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}$.

Lösungsvorschlag

a) Es gilt nach Definition des Kurvenintegrals:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(x)\cdot\,\mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (e^{\cos(t)\sin(t)}, \cos(t)\sin(t))\cdot(-\sin(t),\cos(t))\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \cos^2(t)\sin(t) - \sin(t)e^{\cos(t)\sin(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{1}{3}\cos^3(t)\right]_{t=0}^{t=2\pi} - \int_0^{\pi} \sin(t)e^{\cos(t)\sin(t)}\,\mathrm{d}t - \int_\pi^{2\pi} \sin(t)e^{\cos(t)\sin(t)}\,\mathrm{d}t \\
&\overset{t=\tau+\pi}{=} \left[-\frac{1}{3}\cos^3(t)\right]_{t=0}^{t=2\pi} - \int_0^{\pi} \sin(t)e^{\cos(t)\sin(t)}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi} \sin(\tau)e^{\cos(\tau)\sin(\tau)}\,\mathrm{d}\tau = 0
\end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = 2x = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend und f ein C^1-Vektorfeld ist, gilt nach Abschnitt 19.25 der Vorlesung, dass f ein Potentialfeld ist. Also hängt der Wert des Integrals nicht von dem konkreten Weg, sondern nur von den Randpunkten ab (19.24). Es ist

$$\gamma(0) = (0,0), \quad \gamma\left(\frac{19}{4}\pi\right) = (-1, 2).$$

Wähle also $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\tilde{\gamma}(t) = t(-1,2)$. Es gilt:

$$\int_\gamma f(x)\cdot\,\mathrm{d}x = \int_{\tilde{\gamma}} f(x)\cdot\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(\tilde{\gamma}(t))\cdot\tilde{\gamma}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 4t^2 + 10t^2\,\mathrm{d}t = 14\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = \frac{14}{3}[t^3]_{t=0}^{t=1} = \frac{14}{3}$$

Aufgabe 47 (Tutorium)

Berechnen Sie jeweils das Kurvenintegral

$$\int_\gamma f(x)\cdot\, \mathrm{d}x.$$

a) $f(x,y,z) = e^{-xz}\begin{pmatrix} 2x - x^2z - 5zy^3 \\ 15y^2 \\ -x^3 - 5xy^3 \end{pmatrix}$, $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 - t \\ \sin(\pi t) \end{pmatrix}$,

b) $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ -z \\ x \end{pmatrix}$, $\gamma : [0, \log(2)] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \sinh(t) \\ \cosh(t) \\ \sinh(t) \end{pmatrix}$.

Lösungsvorschlag

a) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) &= -15y^2ze^{-xz} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) \\
\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) &= (-3x^2 - 5y^3 + x^3z + 5xy^3z)e^{-xz} = \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z) \\
\frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) &= -15xy^2 = \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z)
\end{aligned}$$

für alle $x,y,z \in \mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend und f ein C^1-Vektorfeld ist, gilt nach Abschnitt 19.25 der Vorlesung, dass f ein Potentialfeld ist. Also hängt der Wert des Integrals nicht von dem konkreten Weg, sondern nur von den Randpunkten ab (19.24). Es ist

$$\gamma(0) = (0,0,0), \quad \gamma(1) = (1,0,0).$$

Wähle also $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ mit $\tilde{\gamma}(t) = (t,0,0)$. Es gilt:

$$\int_\gamma f(x)\cdot\, \mathrm{d}x = \int_{\tilde{\gamma}} f(x)\cdot\, \mathrm{d}x = \int_0^1 f(\tilde{\gamma}(t))\cdot\tilde{\gamma}'(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^1 2t\, \mathrm{d}t = \left[t^2\right]_{t=0}^{t=1} = 1$$

b) Es gilt nach Definition des Kurvenintegrals:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(x)\cdot\, \mathrm{d}x &= \int_0^{\log(2)} f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\log(2)} (\cosh(t), -\sinh(t), \sinh(t))\cdot(\cosh(t), \sinh(t), \cosh(t))\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\log(2)} \cosh^2(t) - \sinh^2(t) + \sinh(t)\cosh(t)\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\log(2)} 1 + \sinh(t)\cosh(t)\, \mathrm{d}t = \log(2) + \frac{1}{2}\left[\sinh^2(t)\right]_{t=0}^{t=\log(2)} = \log(2) + \frac{9}{32}
\end{aligned}$$

Aufgabe 48 (Übung)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_A \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}(x,y)$, $A=[0,1]^2$,

b) $\int_B xy+y^2 \,\mathrm{d}(x,y)$, $B=[0,1]^2$,

c) $\int_C \cosh(2x+y) \,\mathrm{d}(x,y)$, $C=[-1,0]\times[0,2]$.

Lösungsvorschlag

a) Da der Integrand stetig ist, können wir den Satz von Fubini (20.3) anwenden. Es folgt

$$
\begin{aligned}
\int_A \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \left[\frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\right]_{y=0}^{y=1} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{(2+x^2)^{\frac{1}{2}}} \,\mathrm{d}x \\
&= [\operatorname{Arsinh}(x)]_{x=0}^{x=1} - \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 \frac{1}{\left(1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \,\mathrm{d}x \\
&\overset{y=\frac{x}{\sqrt{2}}}{=} \operatorname{Arsinh}(1) - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}} \,\mathrm{d}y = \operatorname{Arsinh}(1) - [\operatorname{Arsinh}(y)]_{y=0}^{y=\frac{\sqrt{2}}{2}} = \\
&= \operatorname{Arsinh}(1) - \operatorname{Arsinh}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \log\left(1+\sqrt{2}\right) - \log\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \log\left(\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}
$$

b) Da der Integrand stetig ist, können wir den Satz von Fubini (20.3) anwenden. Es folgt

$$
\begin{aligned}
\int_B xy+y^2 \,\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^1 \int_0^1 xy+y^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^1 [\frac{x^2 y}{2} + xy^2]_{x=0}^1 \,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{y}{2} + y^2 \,\mathrm{d}y \\
&= [\frac{y^2}{4} + \frac{y^3}{3}]_{y=0}^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}.
\end{aligned}
$$

c) Da der Integrand stetig ist, können wir den Satz von Fubini (20.3) anwenden. Es folgt

$$
\begin{aligned}
\int_C \cosh(2x+y) \,\mathrm{d}(x,y) &= \int_{-1}^0 \int_0^2 \cosh(2x+y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 [\sinh(2x+y)]_{y=0}^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^0 \sinh(2x+2) - \sinh(2x) \,\mathrm{d}x = [\frac{1}{2}(\cosh(2x+2) - \cosh(2x))]_{x=-1}^0 \\
&= \frac{1}{2}(1 - \cosh(-2) - \cosh(2) + 1) = 1 - \cosh(2).
\end{aligned}
$$

Aufgabe 49 (Tutorium)

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\int_A \frac{1}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}(x,y)$, $A=[1,2]\times[3,4]$,

b) $\int_B y\sin(xy)\,\mathrm{d}(x,y)$, $B=[0,1]\times[0,\pi/2]$,

c) $\int_C \frac{x^2z^3}{1+y^2}\,\mathrm{d}(x,y,z)$, $C=[0,1]^3$,

d) $\int_D \sin(x+y+z)\,\mathrm{d}(x,y,z)$, $D=[0,\pi]^3$.

Lösungsvorschlag

a) Da der Integrand stetig ist, können wir den Satz von Fubini (20.3) anwenden. Es folgt

$$\begin{aligned}\int_A \frac{1}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_1^2\int_3^4 \frac{1}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = -\int_1^2\left[\frac{1}{x+y}\right]_{y=3}^{y=4}\mathrm{d}x\\ &= \int_1^2 \frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x - \int_1^2\frac{1}{x+4}\,\mathrm{d}x = [\log(x+3)]_{x=1}^{x=2} - [\log(x+4)]_{x=1}^{x=2}\\ &= \log\left(\frac{5}{4}\right)-\log\left(\frac{6}{5}\right)=\log\left(\frac{25}{24}\right)\end{aligned}$$

b) Da der Integrand stetig ist, können wir den Satz von Fubini (20.3) anwenden. Es folgt

$$\begin{aligned}\int_B y\sin(xy)\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 y\sin(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}}[-\cos(xy)]_{x=0}^1\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1-\cos(y)\,\mathrm{d}y\\ &= [y-\sin(y)]_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}-1.\end{aligned}$$

c) Da der Integrand stetig ist, können wir den Satz von Fubini (20.3) anwenden. Es folgt

$$\begin{aligned}\int_C \frac{x^2z^3}{1+y^2}\,\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2z^3}{1+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 z^3\int_0^1\frac{1}{1+y^2}\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ &= \int_0^1 z^3\,\mathrm{d}z\int_0^1\frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = [\frac{z^4}{4}]_{z=0}^1[\arctan y]_{y=0}^1[\frac{x^3}{3}]_{x=0}^1\\ &= \frac{1}{4}\cdot\arctan(1)\cdot\frac{1}{3}=\frac{\pi}{48}\end{aligned}$$

d) Da der Integrand stetig ist, können wir den Satz von Fubini (20.3) anwenden. Es folgt

$$\begin{aligned}\int_D \sin(x+y+z)\,\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^\pi\int_0^\pi\int_0^\pi \sin(x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ &= \int_0^\pi\int_0^\pi[-\cos(x+y+z)]_{x=0}^\pi\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^\pi\int_0^\pi \cos(y+z)-\cos(\pi+y+z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ &= 2\int_0^\pi\int_0^\pi\cos(y+z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 2\int_0^\pi[\sin(y+z)]_{y=0}^\pi\,\mathrm{d}z\\ &= 2\int_0^\pi \sin(\pi+z)-\sin(z)\,\mathrm{d}z = -4\int_0^\pi\sin(z)\,\mathrm{d}z = 4[\cos(z)]_{z=0}^\pi = -8\end{aligned}$$

Aufgabe 50 (Übung)

Bestimmen Sie das Volumen der folgenden Mengen.

a) $M_{f,0}$, wobei $f : [0,1] \times [1,\sqrt{3}]$, $f(x,y) = \frac{1}{(x+y^2)^2}$,

b) $S_n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geqslant 0 \ (1 \leqslant i \leqslant n), x_1 + \cdots + x_n \leqslant 1\}$, $n \in \mathbb{N}$ (*n-dimensionaler Standardsimplex*).

Lösungsvorschlag

a) Da f auf seinem Definitionsbereich positiv ist, ist $M_{f,0}$ korrekt definiert. Es gilt

$$|M_{f,0}| = \int_{[0,1]\times[1,\sqrt{3}]} \frac{1}{(x+y^2)^2} \, \mathrm{d}(x,y).$$

Da f stetig ist, können wir den Satz von Fubini (19.3) verwenden und sehen, dass

$$\begin{aligned} |M_{f,0}| &= \int_1^{\sqrt{3}} \int_0^1 \frac{1}{(x+y^2)^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_1^{\sqrt{3}} [-\frac{1}{x+y^2}]_{x=0}^1 \, \mathrm{d}y = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{y^2} - \frac{1}{1+y^2} \, \mathrm{d}y \\ &= [-\frac{1}{y} - \arctan(y)]_{y=1}^{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} - \arctan(\sqrt{3}) + 1 + \arctan(1) = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{12}, \end{aligned}$$

wobei wir $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ verwendet haben.

b) Es sei $S_n(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geqslant 0 \ (1 \leqslant i \leqslant n), x_1 + \cdots + x_n \leqslant a\}$ für $0 \leqslant a \leqslant 1$. Wir zeigen induktiv (über n), dass $|S_n(a)| = \frac{a^n}{n!}$, womit

$$|S_n| = |S_n(1)| = \frac{1}{n!}$$

folgen würde.
Induktionsanfang ($n = 1$): Es gilt $|S_1(a)| = \int_0^a 1 \, \mathrm{d}x = a$.
Induktionsschritt ($n \to n+1$): Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$ (IV). Es folgt nach dem Prinzip von Cavalieri

$$|S_{n+1}(a)| = \int_0^a |S_n(a - x_{n+1})| \, \mathrm{d}x_{n+1} \overset{(IV)}{=} \int_0^a \frac{(a-x_{n+1})^n}{n!} \, \mathrm{d}x_{n+1} = [-\frac{(a-x_{n+1})^{n+1}}{(n+1)!}]_{x_{n+1}=0}^a = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Dies folgt, da für $x_{n+1} \in [0,a]$ gilt, dass

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, x_{n+1}) \in S_{n+1}(a)\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geqslant 0 \ (i \leqslant 1 \leqslant n), x_1 + \cdots + x_n \leqslant a - x_{n+1}\} = S_n(a - x_{n+1}).$$

Aufgabe 51 (Tutorium)

Bestimmen Sie das Volumen der folgenden Mengen.

a) $M_{f,g}$, wobei $f,g : [1,2]^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \mathrm{e}^{x+y}$, $g(x,y) = x^2 y$ (zeigen Sie zunächst, dass $g \leqslant f$ auf $[1,2]^2$),

b) $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant y\mathrm{e}^{-x} \leqslant b, c \leqslant y \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant d\}$, $0 < a < b < c < d$

c) $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z \geqslant 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leqslant 1\}$.

Lösungsvorschlag

a) Die Funktion f ist stetig auf ganz $\mathbb{R}^2$, sodass für jedes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt (Taylorentwicklung dritten Grades)

$$f(x,y) = 1 + x + y + \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2} + \frac{1}{6} \sum_{j_1,j_2,j_3=1}^{2} x_{j_1} x_{j_2} x_{j_3} \mathrm{e}^{\chi_1 + \chi_2},$$

wobei $(\chi_1, \chi_2) \in S[(0,0),(x,y)]$ und $x_1 = x$, $x_2 = y$. Dies liegt daran, dass alle partiellen Ableitungen (auch die mehrfachen) von f wieder f entsprechen. Für $(x,y) \in [1,2]^2$ gilt demnach

$$f(x,y) \geqslant \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2} \geqslant 2xy \geqslant x^2 y = g(x,y)$$

wegen $(x-y)^2 \geqslant 0$, also $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$. Somit ist $M_{f,g}$ korrekt definiert. Da f und g stetig sind, gilt mit dem Satz von Fubini, dass

$$\begin{aligned} |M_{f,g}| &= \int_1^2 \int_1^2 \mathrm{e}^{x+y} - x^2 y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_1^2 [\mathrm{e}^{x+y} - \frac{x^2 y^2}{2}]_{y=1}^2 \,\mathrm{d}x = \int_1^2 \mathrm{e}^{x+2} - \mathrm{e}^{x+1} - \frac{3x^2}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= [\mathrm{e}^{x+2} - \mathrm{e}^{x+1} - \frac{x^3}{2}]_{x=1}^2 = (\mathrm{e}^4 - \mathrm{e}^3 - 4) - (\mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^2 - \frac{1}{2}) = \mathrm{e}^4 - 2\mathrm{e}^3 + \mathrm{e}^2 - \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

b) Prinzipiell gilt $c \leqslant y \leqslant d$. Zusätzlich gelten die Restriktionen

$$y \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant d \Leftrightarrow \log(y) \leqslant x \leqslant \log(d)$$

und

$$a \leqslant y\mathrm{e}^{-x} \leqslant b \Leftrightarrow \log(y) - \log(b) \leqslant x \leqslant \log(y) - \log(a).$$

<u>1. Fall:</u> $a > 1$. Dann gilt $\log(a) > 0$ und die Restriktionen liefern

$$\log(y) \leqslant x \leqslant \log(y) - \log(a) < \log(y),$$

ein Widerspruch. Somit gilt hier $B = \emptyset$ und $|B| = 0$.
<u>2. Fall:</u> $a \leqslant 1$, $b > 1$. Dann gilt $\log(a) \leqslant 0$ und $\log(b) > 0$.

(i) $\frac{c}{a} \geqslant d$. Die Kombination der Restriktionen liefert

$$\log(y) \leqslant x \leqslant \log(d)$$

und das Prinzip von Cavalieri

$$\begin{aligned} |B| &= \int_c^d \int_{\log(y)}^{\log(d)} 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \log(d) - \log(y)\,\mathrm{d}y = [y\log(d) - y(\log(y) - 1)]_{y=c}^d \\ &= d + c(\log(\frac{c}{d}) - 1). \end{aligned}$$

(ii) $\frac{c}{a} < d$. Die Kombination der Restriktionen liefert

$$\log(y) \leqslant x \leqslant \begin{cases} \log(y) - \log(a) & , y \leqslant da, \\ \log(d) & , y > da. \end{cases}$$

Das Prinzip von Cavalieri liefert

$$|B| = \int_c^{da} \int_{\log(y)}^{\log(y)-\log(a)} 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \int_{da}^{d} \int_{\log(y)}^{\log(d)} 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{2. Int s.o. (da statt d)}}{=} -\int_c^{da} \log(a) \, \mathrm{d}y + d + da(\log(a) - 1) = d(1-a) + c\log(a).$$

3. Fall: $b \leqslant 1$. Wieder gibt es die beiden Unterteilungen wie im 2. Fall, in beiden ändert sich lediglich die Untergrenze für x zu $\log(y) - \log(b)$. Es ergibt sich somit

(i) $\frac{c}{a} \geqslant d$.

$$|B| = d + c(\log(\frac{c}{d}) - 1) + (d-c)\log(b).$$

(ii) $\frac{c}{a} < d$.

$$|B| = d(1-a) + c\log(a) + (d-c)\log(b).$$

c) Gilt $(x,y,z) \in B$, so folgt $z \in [0,1]$. Für ein festes solches z gilt

$$Q(z) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y,z) \in B\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y \geqslant 0,\ \sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant 1 - \sqrt{z}\}.$$

Somit folgt $y \in [0, (1-\sqrt{z})^2]$. Für ein festes solches y gilt

$$\tilde{Q}(z,y) := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0,\ \sqrt{x} \leqslant 1 - \sqrt{z} - \sqrt{y}\} = [0, (1 - \sqrt{z} - \sqrt{y})^2].$$

Wenden wir also das Prinzip von Cavalieri zwei Mal an, erhalten wir

$$|A| = \int_0^1 |Q(z)| \, \mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^{(1-\sqrt{z})^2} |\tilde{Q}(z,y)| \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^{(1-\sqrt{z})^2} (1 - \sqrt{z} - \sqrt{y})^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1 \int_0^{(1-\sqrt{z})^2} (1-\sqrt{z})^2 - 2(1-\sqrt{z})\sqrt{y} + y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_0^1 [(1-\sqrt{z})^2 y - \frac{4}{3}(1-\sqrt{z}) y^{3/2} + \frac{y^2}{2}]_{y=0}^{(1-\sqrt{z})^2} \, \mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^1 (1-\sqrt{z})^4 \, \mathrm{d}z \overset{s=1-\sqrt{z}}{=} -\frac{1}{3} \int_0^1 s^4(s-1) \, \mathrm{d}s = -\frac{1}{3}[\frac{s^6}{6} - \frac{s^5}{5}]_{s=0}^1 = \frac{1}{90}$$